

МЕТОД ГРАМА-ШМИДТА ДЛЯ АНАЛИЗА АБЕРРАЦИЙ В ПРОЦЕССЕ ТЕСТИРОВАНИЯ ЗЕРКАЛА ТЕЛЕСКОПА

Толстоба Н.Д.

Санкт-Петербургский Государственный Институт Точной Механики и Оптики
(Технический Университет)

197101, Санкт-Петербург, ул. Саблинская, 14
телефон/факс: (812) 2388724, e-mail: nadinet@aco.ifmo.ru

1. АННОТАЦИЯ

Для контроля качества крупногабаритной астрономической оптики в условиях обсерватории широко используется метод Гартмана. В данной статье рассматриваются проблемы восстановления волнового фронта и деформации главного зеркала при использовании метода Гартмана с малоразмерной диафрагмой в сходящемся пучке лучей для контроля телескопа. Показано, что в силу слабой обусловленности задачи восстановления наиболее подходящим решением проблемы является процесс Грама-Шмидта, позволяющий при соответствующей модификации получить наилучшую обусловленность и минимизировать тем самым погрешность восстановления.

Keywords: Hartmann, Zernike, Gram-Schmidt procedure, optical surface testing, high diameter telescopes.

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные оптические астрономические приборы представляют собой сложные инженерные комплексы. При этом в таких приборах предусматриваются средства самоконтроля и самоаттестации.

Эффективность телескопа определяется не только диаметром, который обеспечивает минимальный размер кружка рассеяния, но и целым рядом других факторов - чувствительностью приемника излучения, точностью системы слежения телескопа, фоновому свечению ночного неба, астроклимата в районе обсерватории и микроклимата в башне телескопа. Но более важным фактором является остаточные деформации поверхности зеркала, искажающие волновой фронт и существенно снижающие качество изображения.

В данной работе рассматривается методика математической обработки полученных после идентификации пятен на гартманограмме результатов с целью восстановления деформации контролируемой поверхности.

2. КОНТРОЛЬ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ ОПТИКИ МЕТОДОМ ГАРТМАНА

Основополагающий принцип методов контроля с применением экрана заключается в том, что волновой фронт оценивается в ряде предварительно выбранных точек и результаты сравниваются с теоретическими значениями [10]. Волновой фронт оценивается несколькими лучами или пучками, перпендикулярными к нему, а отклонение световых следов от их идеальных положений фиксируется на некоторой регистрирующей плоскости.

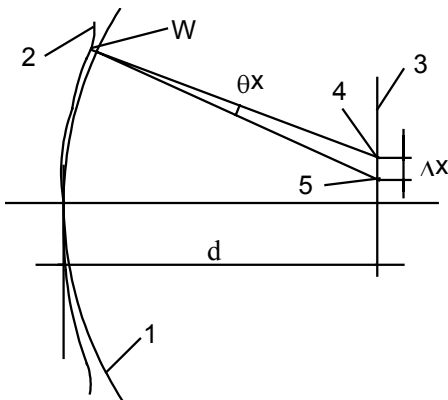


Рис. 1.2 Схема хода лучей в методе Гартмана:

- 1 - идеальный волновой фронт; 2 - реальный волновой фронт;
- 3 - плоскость регистрации; 4 - реальное положение луча;
- 5 - идеальное положение луча.

На рисунке показаны :

- Δx - значение одной из составляющих отклонения луча;
- d - расстояние между зеркалом и плоскостью наблюдения; θx - угловой наклон.

Результирующая величина отступления от идеальной формы поверхности в любую сторону h , связана с отклонением W волнового фронта соотношением $W = 2 \cdot h$.

Связь между aberrацией W волнового фронта и составляющей X отклонения луча в плоскости наблюдения можно получить из следующего приближенного выражения:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\Delta x}{d} \tag{1}$$

Проинтегрировав его, и записав отклонение поверхности h в длинах волн, получим:

$$H = \frac{1}{2d\lambda} \int_0^x \Delta x dx \tag{2}$$

Так как функция Δx определена только в дискретных точках - аналогах отверстий экрана, интегрирование обычно проводится по формуле трапеции

$$H_N = \frac{1}{2d\lambda} \cdot \sum_{n=2}^N \left(\frac{\Delta x_{n-1} + \Delta x_{n+1}}{2} \right) \cdot \delta x_{n-1}$$

$$H_M = \frac{1}{2d\lambda} \cdot \sum_{m=2}^M \left(\frac{\Delta y_{m-1} + \Delta y_{m+1}}{2} \right) \cdot \delta y_{m-1} \tag{3}$$

Другие методы интегрирования приводят к более надежным результатам.

Волновой фронт можно затем записать в терминах полинома Цернике. Теоретически этот метод идеален, так как в нем отсутствует погрешность методов численного интегрирования [10]. Трудность заключается в выборе подходящего полинома, поскольку такое приближение может приводить к необоснованному сглаживанию имеющих место острых выступов или к введению каких-либо изменений, отсутствующих в действительности. Это происходит при использовании полиномов слишком малого или слишком высокого порядков. Нет нужды говорить, что в результате снижается надежность результатов контроля, особенно вблизи края зеркала.

Из сказанного очевидно, что одна из главных трудностей в методах контроля с применением экрана заключается в возникновении ошибок, связанных с преобразованием данных для получения отклонений поверхности. Ошибки могут быть уменьшены, если метод контроля допускает получение нужной величины несколькими независимыми способами, так как в присутствии погрешности наиболее надежный результат достигается при многократных повторениях и последующих усреднениях данных контроля.

Таким образом, метод контроля с применением экрана, позволяющий использовать несколько независимых способов получения отклонения поверхности в выбранных точках, может дать лучшую аппроксимацию к действительному значению отклонения, чем метод, не использующий этой процедуры.

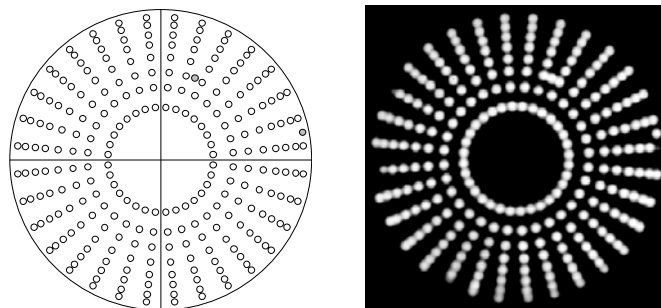


Рис. 1. Схема расположения отверстий на радиальном экране Гартмана и соответствующий ей снимок гартманогаммы.

Основной принцип контроля с помощью радиальных экранов заключается в том, что на вогнутой зеркальной поверхности с круговой апертурой выделяют ряд точек с помощью небольших отверстий в непрозрачном экране, расположенных по прямым вдоль нескольких диаметров зеркала (Рис. 1). Картина такого типа обладает рядом преимуществ: облегчается анализ круглой апертуры в полярных координатах и предоставляется возможность выявить наиболее общие дефекты зеркальных поверхностей - зональные погрешности, концентричные «бугры» и «ямь» размером в несколько долей микрометра, являющиеся результатом классических методов шлифования и полирования. Таким образом, радиальный экран обеспечивает простоту анализа результатов контроля основных видов поверхностных дефектов.

2.1. КОНТРОЛЬ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА ТЕЛЕСКОПА С МАЛОРАЗМЕРНОЙ ДИАФРАГМОЙ ГАРТМАНА В СХОДЯЩЕМСЯ ПУЧКЕ ЛУЧЕЙ

Для контроля астрономических телескопов обычно используют метод Гартмана с полноразмерной диафрагмой, установленной в параллельном пучке лучей перед объективом. Однако, при больших диаметрах зеркала применение такой диафрагмы наталкивается на значительные трудности, связанные с ее установкой перед контролем и снятием после.

Для контроля главного зеркала БТА была использована малоразмерная диафрагма Гартмана, установленная в сходящемся ходе лучей вблизи фокуса главного зеркала [19,20,21].

Конструктивно она была выполнена в виде отверстий в крышке стакана главного фокуса и в любой момент она могла быть легко введена в ход лучей для производства контроля и затем так же легко выведена.

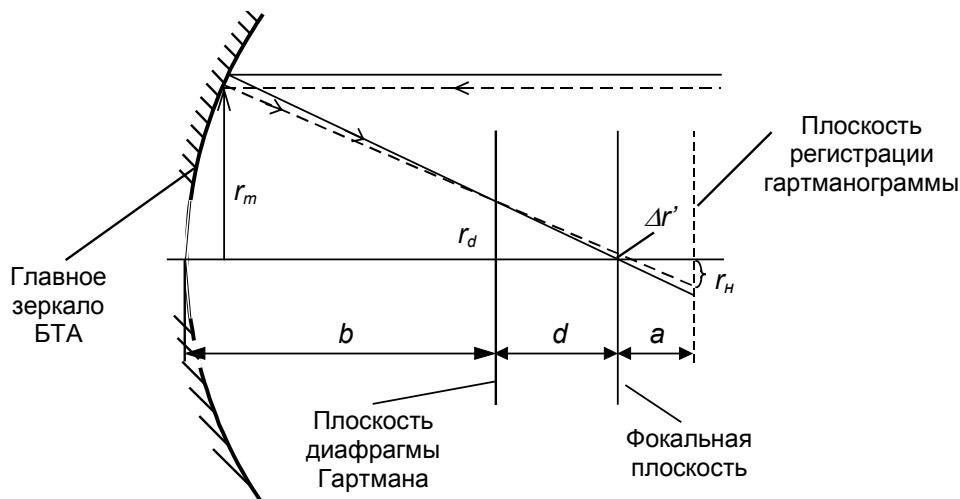


Рис. 1.4 Схема контроля главного зеркала БТА с малоразмерной диафрагмой Гартмана в сходящемся пучке лучей

На рисунке отображены лучи, проходящие через центр какого-либо отверстия в диафрагме Гартмана.

Сплошной линией показан луч, соответствующий идеальному зеркалу, пунктиром - деформированному. Координаты луча в плоскости диафрагмы Гартмана одинаковы для идеального и возмущенного лучей и образуют вектор r_d с координатами (x_d, y_d) . В фокальной плоскости возмущенный луч имеет координаты $(\Delta x, \Delta y)$, образующие вектор поперечных aberrаций $\Delta r'$. Этот луч в плоскости регистрации гартманограммы формирует пятно, центр которого имеет координаты (x_H, y_H) , образующие вектор r_H . Наконец, на поверхности зеркала возмущенный луч имеет координаты пробной точки (x_m, y_m) , образующие вектор r_m .

Легко установить связь между этими координатами, считая известными вектор r_d и вектор r_H .

$$x_H = \Delta x \cdot \left(1 + \frac{a}{d}\right) - x_d \cdot \frac{a}{d} + c_x, \quad y_H = \Delta y \cdot \left(1 + \frac{a}{d}\right) - y_d \cdot \frac{a}{d} + c_y \quad (4)$$

где c_x, c_y - поперечные смещения центра приемника матрицы, заранее неизвестные.

Нашей целью является определение поперечных aberrаций, однако предварительно из выражений (1.4.1) необходимо уточнить не точно известные расстояние a и неизвестные смещения c_x, c_y .

Эта задача может быть решена применением метода наименьших квадратов, минимизирующего сумму квадратов поперечных aberrаций, после чего уточненные поперечные aberrации $\Delta x, \Delta y$ определяются из выражения (1.4.2).

Как известно, поперечные aberrации есть частные производные от волновой aberrации по каноническим (относительным зрачковым координатам):

$$\Delta x = \frac{\partial W}{\partial \rho_x} / A', \quad \Delta y = \frac{\partial W}{\partial \rho_y} / A' \quad (5)$$

где W - волновая aberrация, выраженная в абсолютной мере (в данной задаче в мм), ρ_x, ρ_y - относительные (канонические) координаты луча на зеркале, определяемые выражениями:

$$\rho_x = \frac{2 \cdot x_m}{D}, \quad \rho_y = \frac{2 \cdot y_m}{D}, \quad (6)$$

A' - задняя апертура зеркала.

$$A' = \frac{D}{2f'}, \quad (7)$$

где x_m, y_m - координаты луча (пробной точки) на зеркале, D - диаметр зеркала, f' - его фокусное расстояние.

Координаты (x_m, y_m) могут быть найдены по известным поперечным aberrациям $\Delta x, \Delta y$ и координатам отверстия в диафрагме Гартмана (x_d, y_d) из уравнения встречи луча с параболоидом вращения, которым является зеркало.

Таким образом, мы из уравнений (1.4.2) имеем поперечные aberrации, из уравнений встречи и из формул (1.4.3) и (1.4.4) - канонические координаты пробных точек на зеркале.

3. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГАРТМАНОВСКОГО ТЕСТА

Вычисление поперечных aberrаций, деформаций зеркала и построение профиля отражающей поверхности требует определения с высокой точностью координат точек пересечения лучей света, прошедших через диафрагму Гартмана, с плоскостью изображения. До последнего времени гартманогаммы регистрировались на фотопластинках, анализ производился вручную, а измерения проводились при визуальной наводке на центр пятна на двухкоординатных измерительных приборах с точностью измерения центров пятен $\pm 10 \div 12$ мкм. С целью повышения точности до $\pm 3 \div 5$ мкм производился анализ нескольких гартманогамм и усреднение полученных результатов.

Поэтому нужно автоматизировать анализ и получать значения координат центров пятен на гартманогамме с точностью не хуже чем $\pm 3 \div 5$ мкм.

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАСШТАБА И ОРИЕНТАЦИИ ГАРТМАНОВСКОЙ ГРАММЫ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЯТЕН.

Регистрация гартманогаммы производится с помощью системы для цифровой регистрации изображений на фоточувствительной матрице приборов с зарядовой связью. Система для цифровой регистрации изображений позволяет сохранять изображение в виде бинарных файлов с текстовым заголовком (FITS-формат).

Для контроля главного зеркала БТА используется классический радиальный экран Гартмана, имеющий 8 радиальных рядов по 32 точки в каждом (Рис. 1.3). Параметры диафрагмы Гартмана, а значит и координаты всех ее отверстий, известны и будут использоваться для определения поперечных aberrаций, которые вычисляются как разность координат пятен на реальной и идеальной гартманогамме.

Предварительный анализ гартманогаммы заключается в определении центра тяжести всей выборки значений интенсивности на гартманогамме. После того как центр тяжести выбран за начало системы координат, с помощью двух реперных точек в верхней правой части диафрагмы необходимо определить масштаб и ориентацию гартманогаммы.

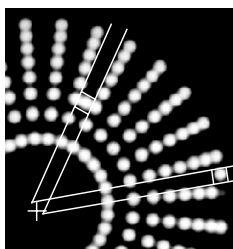


Рис. 1.5 Сканирующее окно для обнаружения реперных пятен.

По известным параметрам диафрагмы Гартмана теперь нетрудно определить масштаб M и смещение центра реальной гартманогаммы от идеальной. Для преобразования координат теперь нужно пользоваться следующими формулами:

$$x' = mx + x_c; y' = my + y_c; \tag{8}$$

Кроме того, по положению реперных точек однозначно определяется ориентация гартманогаммы. По принятому порядку нумерации отверстий на диафрагме производится идентификация пятен, то есть соответствие пятен определенным отверстиям. Таким образом, определяется порядок обхода отверстий диафрагмы.

Сначала определяется приближенное значение координат центров пятен как центров тяжести (среднее геометрическое) области выделенной на гартманогамме. Затем для достижения требуемой точности выборка интенсивности на сепарированной области аппроксимируется как гауссоида при помощи метода наименьших квадратов, а затем координаты центра пятна определяются как координаты максимума аппроксимированной функции. В дальнейшем предполагается развитие метода с помощью использования гауссоиды более высокого порядка.

ПОЛУЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ О ДЕФОРМАЦИЯХ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕРКАЛА.

Так как волновая aberrация связана с деформацией зеркала множителем -2 , то из формулы (1.6.1) мы можем получить выражения для частных производных деформации зеркала по каноническим координатам в пробных точках.

$$\Delta W = -2 \cdot \Delta Z \tag{1.6.1}$$

где ΔW - деформация волнового фронта, формируемого зеркалом, а ΔZ - искомая деформация поверхности зеркала.

Отсюда мы получаем исходные соотношения для определения деформации, восстанавливая ее по частным производным в пробных точках.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА ТЕЛЕСКОПА

В астрономических системах большое значение имеет разложение по полиномам Цернике, ортогональным на кольце с заданным коэффициентом центрального экранирования ε .

Для аппроксимации функции волновой aberrации наиболее разумным будет использование базиса, ортогонального на кольцевой области.

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА АППРОКСИМАЦИИ

Зависимость ортогональных полиномов Цернике от полярных координат в общем виде выглядит таким образом:

$$P_n^{\pm m}(\rho \cdot \cos \varphi, \rho \cdot \sin \varphi) = R_n^m(\rho) \exp(\pm i \cdot m \cdot \varphi), \quad (10)$$

где m, n , как известно, целые положительные числа, имеющие ограничение в виде неравенства: $n \geq m$, кроме того разность $(n - m)$ должна быть четным числом.

Наиболее эффективный способ вычисления значений полиномов Цернике заключается в использовании трехчленных рекуррентных соотношений Форсайта:

$$Q_{k+1}^m(t) = \gamma_{k+1}^m \left[(t - \alpha_{k+1}^m) \cdot Q_k^m(t) - \beta_{k+1}^m \cdot Q_{k-1}^m(t) \right] \quad 11$$

Коэффициенты этих соотношений $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$, можно получить требуемый полином Цернике. вычисляются исходя из требований формы области ортогональности (круг или кольцо). Параметры кольца определяются экранированием. Интегралы для вычисления коэффициентов α_k^m и нормы λ_k^m определяются численно.

Непосредственно для аппроксимации поперечных aberrаций требуется вычисление не только полиномов, но и их частных производных по каноническим координатам, так как:

$$\Delta \eta_x = \frac{\partial W}{\partial \rho_x}, \quad \Delta \eta_y = \frac{\partial W}{\partial \rho_y} \quad (12)$$

Частные производные ортогональных на кольце полиномов Цернике по каноническим координатам вычисляются с использованием соотношения Форсайта, в которое входят коэффициенты $\alpha_k^m, \beta_k^m, \gamma_k^m$, вычисленные для области ортогональности:

$$Q'_{k+1}{}^m(t) = \gamma_{k+1}^m \left[(t - \alpha_{k+1}^m) \cdot Q'_k{}^m(t) - \beta_{k+1}^m \cdot Q'_{k-1}{}^m(t) + Q_k^m(t) \right] \quad (13)$$

С использованием вышеперечисленных соотношений мы имеем возможность получить значения как полиномов Цернике, так и их частных производных, ортогональных на кольце и на круге.

ФОРМИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ЗАДАЧИ.

В данной части представленной работы исходными данными для определения коэффициентов аппроксимации волновой aberrации по полиномам Цернике, (ортогональным на кольцевой области с центральным экранированием ε), вызванной деформацией зеркала являются значения поперечных aberrаций.

Разложение волновой aberrации по ортогональным полиномам Цернике $W(\rho_x, \rho_y)$ в полярных координатах имеет вид:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^n c_{nm} R_n^m(\rho) \cos(m\varphi) + \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^n s_{nm} R_n^m(\rho) \sin(m\varphi), \quad (14)$$

где c_{nm} и s_{nm} - коэффициенты разложения, которые служат общим численным представлением aberrаций оптической системы. Они подлежат вычислению.

Выражение для вычисления поперечных aberrаций имеет вид:

$$\Delta x' = \frac{-\lambda}{A_x'} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_x'}, \quad \Delta y' = \frac{-\lambda}{A_y'} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_y'} \quad (15)$$

Из выражений (2.2.2) и (2.2.3) ясно, что для вычисления коэффициентов разложения волновой aberrации по полиномам Цернике нужны следующие данные:

- набор значений поперечных aberrаций $\Delta x'$ и $\Delta y'$ в различных точках зрачка, полученный после обработки результатов теста,
- координаты точек, для которых производилось тестирование,
- набор значений производных полиномов Цернике, вычисленных для контролируемых точек.

Для определения коэффициентов разложения нужно исходные данные представить в виде, который определяется методикой вычисления используемой в данной работе.

Если представить систему уравнений в матричной форме, то коэффициенты аппроксимации будут решением системы линейных уравнений, которые можно записать таким образом:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \quad (16)$$

где \mathbf{A} - конструкционная матрица задачи. Структура матрицы показана ниже:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \left. \frac{\partial (R_2^0(\rho))}{\partial \rho_x} \right|_{(\rho_{x1}, \rho_{y1})} & \dots & \left. \frac{\partial (R_n^m(\rho) \cdot \cos(m \cdot \varphi))}{\partial \rho_x} \right|_{(\rho_{x1}, \rho_{y1})} & \dots \\ 1 & \left. \frac{\partial (R_2^0(\rho))}{\partial \rho_y} \right|_{(\rho_{x1}, \rho_{y1})} & \dots & \left. \frac{\partial (R_n^m(\rho) \cdot \cos(m \cdot \varphi))}{\partial \rho_y} \right|_{(\rho_{x1}, \rho_{y1})} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \left. \frac{\partial (R_2^0(\rho))}{\partial \rho_x} \right|_{(\rho_{xN}, \rho_{yN})} & \dots & \left. \frac{\partial (R_n^m(\rho) \cdot \cos(m \cdot \varphi))}{\partial \rho_x} \right|_{(\rho_{xN}, \rho_{yN})} & \dots \\ 1 & \left. \frac{\partial (R_2^0(\rho))}{\partial \rho_y} \right|_{(\rho_{xN}, \rho_{yN})} & \dots & \left. \frac{\partial (R_n^m(\rho) \cdot \cos(m \cdot \varphi))}{\partial \rho_y} \right|_{(\rho_{xN}, \rho_{yN})} & \dots \end{pmatrix}$$

Количество строк в матрице равно количеству исходных данных, то есть двойному количеству точек. Каждая пара строк соответствует поперечной aberrации по x и по y соответственно. Количество столбцов в матрице равно количеству коэффициентов, используемых для аппроксимации волновой aberrации. Сами коэффициенты и поперечные aberrации представлены в виде векторов

\mathbf{C} - матрица коэффициентов aberrаций \mathbf{B} - вектор значений поперечных aberrаций, структура которого соответствует матрице P:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{20} \\ c_{40} \\ \dots \\ c_{nm} \\ s_{11} \\ \dots \\ s_{nm} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \Delta\eta_{x1} \\ \Delta\eta_{y1} \\ \dots \\ \Delta\eta_{xN} \\ \Delta\eta_{yN} \end{pmatrix}$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМАЦИИ ВОЛНОВОЙ АБЕРРАЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

В соответствии с методом наименьших квадратов система уравнений (2.2.4) должна быть преобразована так:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (17)$$

и это выражение можно записать в виде:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F} \quad (18)$$

Решение такой системы в общем виде будет выглядеть таким образом:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \quad (19)$$

или

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (20)$$

Для реализации этого решения воспользуемся методом ортогонализации Грама-Шмидта, с помощью которого мы получим непосредственно значения коэффициентов \mathbf{C} .

Применяя этот метод, мы ортогонализируем строки матрицы \mathbf{D} и преобразуем ее в ортогональную матрицу \mathbf{U} , которая обладает свойством:

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T \quad (21)$$

Одновременно с ортогонализацией матрицы \mathbf{D} должны происходить аналогичные преобразования с вектором правых частей \mathbf{B} соответствующим образом, в результате чего вместо \mathbf{B} мы имеем \mathbf{B}' .

Тогда получаем новую систему уравнений:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}' \quad (22)$$

В процессе ортогонализации, выполняемому по оптимальной стратегии, производится оптимальный выбор строк в матрице \mathbf{D} , обеспечивающий минимальную обусловленность, задаваемую в виде относительного допуска на величину нормы строки.

Кроме того, имеется возможность провести регрессионный анализ вектора норм по одному из статистических критериев (критерий Фишера, критерий χ^2 и т.д.)

После обработки итоговая матрица \mathbf{U} может быть использована для нахождения решения, используя свойство ортогональности:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}' \quad (23)$$

Вычисление коэффициентов разложения волновой aberrации по полиномам Цернике методом наименьших квадратов в данной работе состоит из следующих этапов:

Исходные данные: матрица левых частей \mathbf{A} , Вектор правых частей \mathbf{B} , Вектор для формирования результата решения системы уравнений \mathbf{C} .

- Транспонирование матрицы левых частей \mathbf{A} .
- Вычисление произведения для правой части: $\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$
- Вычисление произведения $\mathbf{D} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ для конструкционной матрицы задачи.
- Ортогонализация матрицы $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}$
- Транспонирование ортогональной матрицы \mathbf{U}^T
- Преобразование матрицы правых частей для приведения в соответствие с левой, получение матрицы \mathbf{H}' .
- Вычисление корней уравнения $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{H}'$

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАМА - ШМИДТА.

Для достижения результата и вычисления коэффициентов аппроксимации волновой аберрации требуется найти матрицу, обратную $\mathbf{D} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$ см.(2.3.3),(2.3.4).

Рассмотрим процесс ортогонализации матрицы \mathbf{D} и непосредственную реализацию с использованием метода Грама-Шмидта, основываясь на его формулировке в работе [7]:

Пусть дано счетное (конечное или бесконечное) множество линейно независимых функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, нормируемых на некотором участке, тогда существует ортонормированная последовательность функций $u_1(x), u_2(x), \dots$, порождающая то же самое многообразие функций. Эта последовательность может быть построена посредством следующих рекуррентных формул, которые осуществляют процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

$$\left. \begin{aligned} u_i(x) &= \frac{v_i(x)}{\|v_i(x)\|} = \frac{v_i(x)}{\sqrt{(v_i, v_i)}}, & (i = 1, 2, \dots) \\ v_1(x) &= \varphi_1(x), \quad v_{i+1}(x) = \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=0}^i (u_k, \varphi_{i+1}) \cdot u_k(x) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Как показывают выражения (2.4.1), в данном случае рассматривается ортогонализация столбцов (векторов) матрицы. В нашем случае по ряду причин требуется применить ортогонализацию строк, а не столбцов конструкционной матрицы задачи.

ФОРМИРОВАНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ \mathbf{U} И ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ МАТРИЦЫ \mathbf{V} .

1. Первая строка соответствует первой строке исходной матрицы \mathbf{D} .

$$v_{00} = d_{00}, \quad v_{01} = d_{01}, \quad v_{02} = d_{02}, \quad v_{03} = d_{03}, \quad \dots, \quad v_{0j} = d_{0j}.$$

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{D}_0$$

Норма первой строки матрицы \mathbf{V} :

$$\|\mathbf{V}_0\| = (\mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0) = d_{00} \cdot d_{00} + d_{01} \cdot d_{01} + d_{02} \cdot d_{02} + d_{03} \cdot d_{03} + \dots$$

В соответствии с формулой: $U_i(x) = \frac{V_i(x)}{\|\mathbf{V}_0\|}$, строка матрицы \mathbf{U} имеет вид:

$$\mathbf{U}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\|\mathbf{V}_0\|}$$

2. Далее требуется произвести расчет скалярного произведения текущей строки исходной матрицы и всех вычисленных на предыдущих шагах строк ортогональной матрицы

$$(\mathbf{U}_k \cdot \mathbf{D}_i) = u_{k0} \cdot d_{i0} + u_{k1} \cdot d_{i1} + u_{k2} \cdot d_{i2} + u_{k3} \cdot d_{i3} + \dots$$

3. Из текущей строки матрицы \mathbf{D} вычитаем предыдущие строки матрицы \mathbf{U} , умноженные на соответствующие им скалярные произведения.

$$v_{10} = d_{10} - u_{00} \cdot (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1), \quad v_{11} = d_{11} - u_{01} \cdot (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1), \quad v_{12} = d_{12} - u_{02} \cdot (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1), \\ \dots, v_{1j} = d_{1j} - u_{0j} \cdot (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1).$$

Таким образом для матрицы \mathbf{V} ,

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_1 - (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{U}_0.$$

Для ортогональной матрицы

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{D}_1 - (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{U}_0}{\|\mathbf{V}_1\|}.$$

4. Таким образом, последовательно на шагах ортогонализации имеем для вспомогательной матрицы:

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{A}_i - \sum_{k=0}^{i-1} (\mathbf{U}_k \cdot \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{U}_k \quad (25)$$

и, соответственно, для ортогональной матрицы:

$$\mathbf{U}_i = \frac{\mathbf{A}_i - \sum_{k=0}^{i-1} (\mathbf{U}_k \cdot \mathbf{A}_i) \cdot \mathbf{U}_k}{\|\mathbf{V}_i\|} \quad (26)$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЕКТОРА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ.

Очевидно, что такие видоизменения конструкционной матрицы должны приводить к соответствующим преобразованиям вектора правых частей, таким образом, чтобы исходные уравнения оставались верными

Процесс ортогонализации влияет на левую часть системы линейных уравнений (2.3.6). Для того, чтобы проиллюстрировать процесс ортогонализации и сопутствующие ему действия, рассмотрим, каким способом нужно преобразовать матрицу правых частей \mathbf{H} для сохранения соответствия измененной левой части уравнения, по аналогии с ортогонализируемой \mathbf{D} .

Для преобразования используются промежуточные данные, полученные в процессе ортогонализации. Сам алгоритм процесса преобразования подобен тому, который используется для ортогонализации матрицы методом Грама-Шмидта.

Обозначим норму $\|\mathbf{V}_i\|$ текущей строки вспомогательной матрицы \mathbf{V} как \mathbf{S}_i . Тогда:

Ортогонализация матрицы \mathbf{D}	Преобразование вектора \mathbf{H} соответствующее процессу ортогонализации
$\mathbf{U}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\mathbf{S}_0}, \quad \mathbf{U}_1 = \frac{\mathbf{D}_1 - (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{U}_0}{\mathbf{S}_1}$	$\mathbf{H}'_0 = \frac{\mathbf{H}_0}{\mathbf{D}_0}, \quad \mathbf{H}'_1 = \frac{\mathbf{H}_1 - (\mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{H}'_0}{\mathbf{S}_1}$
Общее выражение для всех строк матриц \mathbf{D} и \mathbf{H} имеет вид:	

$U_i = \frac{D_i - \sum_{k=0}^{i-1} (U_k \cdot D_i) \cdot U_k}{S_i}$	$H'_i = \frac{H_i - \sum_{k=0}^{i-1} (U_k \cdot D_i) \cdot H'_k}{S_i}$
--	--

Таким образом, после проведения рассмотренных процедур, получаем компоненты U и V' преобразованной системы линейных уравнений (2.3.6), решением которой будет результат вычисления выражения (2.3.7).

ОБСУЖДЕНИЕ ТОЧНОСТИ МЕТОДА

Созданная модель тестировалась следующим образом: по заданным коэффициентам Цернике производилось вычисление поперечных аберраций, значения которых зашумлялись. Результаты аппроксимации не сильно отличаются от исходных данных. По вычисленным коэффициентам нетрудно построить топографическую карту деформаций зеркала. На Рис. 6-7 представлены топографические карты деформаций поверхности зеркала для отдельных типов аберраций и изолинии поверхности.

Для сравнения представлены результаты моделирования без экранирования и с экранированием. Последние рисунки получены со случайными значениями коэффициентов Цернике.

Точность вычисления деформации связана с точностью вычисления коэффициентов деформации волнового фронта, формируемого тестируемой оптической системой через множитель (-2) по формуле (1.6.1).

Погрешность вычисления коэффициентов связана с погрешностью измерения поперечных аберраций (дисперсией поперечных аберраций), которая = 0.05 мм, что следует из предварительной обработки данных. Решение задачи вносит погрешности, определяемые числом обусловленности, которое, как выяснилось в результате неоднократных проверок, существенно зависит от распределения точек на диафрагме Гартмана.

Наилучшим с точки зрения числа обусловленности оказался экран Гартмана с радиальным расположением отверстий, в этом случае число обусловленности близко к 1, в случае прямоугольной сетки оно близко к 100.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы разработан математический аппарат, алгоритмы и программное обеспечение окончательной обработки данных Гартмановского теста астрономической оптики с восстановлением формы деформированного зеркала.

Успешно были решены задачи формирования базиса, ортогонального на кольцевой области, обращения матрицы линейных уравнений методом ортогонализации, обеспечивающим наиболее высокую надежность, а также получены наглядные результаты тестирования в виде восстановленных деформированных поверхностей.

Данная методика разработана применительно к эксплуатационному контролю главного зеркала БТА, но при этом является универсальной и может быть использована для окончательной обработки данных контроля любой оптики, в том числе объективов.

Благодаря хорошей, близкой к идеальной, обусловленности метода, погрешность исходных данных не усиливается при обработке, что дает возможность надежно контролировать точность всего процесса аттестации зеркала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973, 632 с.
2. Бегунов Б.Н., Заказнов Н.П. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1973.- 488с.
3. Вайнер Р., Пинсон Л. С++ изнутри. Пер. с англ. - Киев: ДиаСофт, 1993. - 304 с.
4. Витриченко Э.А. Методы исследования астрономической оптики. М.: Наука, 1980.- 152с.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. - М.: Наука, 1966.- 664с.
6. Компьютеры в оптических исследованиях. Р. Баракат, У. Даллас, Б. Фриден, Л. Мерц, Р. Педжис, А. Риглер. Под ред. Б. Фридена. - М.: Мир, 1983.- С.160-167.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1974. - 832с.
8. Мешков А., Тихомиров Ю. Visual C++ и MFC. Программирование для Windows NT и Windows 95: в 3-х т., СПб.: BHV-Санкт-Петербург, 1997.
9. Оптические телескопы. Теория и конструкция, Н.Н. Михельсон. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва Наука, 1976.- 512с.
10. Оптический производственный контроль / Под ред. Д. Малакары; пер. с английского Е.В.Мазуровой и др.; Под ред. А.Н.Соснова. - М.: Машиностроение, 1985.- 400с.
11. Пол И. Объектно-ориентированное программирование с использованием С++. - Киев. НИПФ "ДиаСофт Лтд.", 1995. - 480с.
12. Рихтер Д. Windows для профессионалов (программирование в Win32 API для Windows NT 3.5 и Windows 95)/ Пер. с англ. - М.: Издательский отдел "Русская Редакция" ТОО "Channel Trading Ltd.", 1995. - 720с.
13. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1982. - 270с.
14. Создание Большого азимутального телескопа БТА. Под ред. В.Ю.Торочкова. М. ЦНИИ информации, 1976.
15. Сухорукова А.Э. Пароль - БТА. - Л.: Дет. Лит., 1984.- 184 с.
16. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973, 632 с.
17. Бездидько С.Н. Определение коэффициентов разложения волновой аберрации по полиномам Цернике. - ОМП, 1975, № 7, с. 75.
18. Бездидько С.Н. Применение полиномов Цернике в оптике- "ОМП", 1974, № 9, с. 58.
19. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В Исследование главного зеркала БТА в обсерватории. - ОМП, 1977, № 4, с. 3.
20. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В Математические основы гартмановского теста главного зеркала БТА. - ОМП, 1977, № 2, с. 18.
21. Зверев В.А., Родионов С.А., Сокольский М.Н., Усоскин В.В Технологический контроль главного зеркала БТА методом Гартмана- "ОМП", 1977, № 3, с. 3.
22. Родионов С.А., Усоскин В.В., Пржевалинский Л.И. Вычисление ортогональных на кольце полиномов Цернике. Л., Труды ЛИТМО, 1979.
23. Усоскин В.В. Упрощенная обработка результатов контроля астрономических систем по методу Гартмана. Л., Труды ЛИТМО, 1979.
24. Шабанов М.Ф., Ерохин В. И., Тихонов Н.А. Результаты аттестации главного зеркала после алюминирования. Отчет САО. АН СССР, сентябрь 1979.