ЛУЧЕВАЯ МОДЕЛЬ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ГАУССОВОГО ПУЧКА

Вон Дон Чжу; Ми Сук Чжун; С. А. Родионов

Рассмотрен процесс распространения частично-когерентных симметричных и несимметричных гауссовых пучков, распространяющихся в однородной среде и вдоль оси произвольной оптической системы в параксиальном приближении и на основе концепций лучевой модели в рамках геометрической оптики. Показано, что такие пучки описываются такими же параметрами, как и в классической теории когерентные гауссовые пучки, а также доказана справедливость правила "ABCD" Котельника для рассматриваемых гауссовых пучков в двух важных случаях.

В последнее время большое внимание многих авторов привлекают частично-когерентные пучки в форме так называемых пучков гауссовой шелловской модели [1-4], которые имеют яркость и степень когерентности, описываемые гауссовыми функциями. Несомненный интерес имеет изучение таких пучков с чисто геометрических позиций с использованием лучевых моделей. В предыдущей работе [5] авторов данной статьи лучевая модель была применена к гауссовым пучкам с круговой симметрией и были получены выражения, описывающие распространение таких пучков в свободном пространстве и преобразование их центрированной оптической системой. В настоящей работе дано описание при помощи лучевой модели гауссовых пучков самого общего вида, не имеющих ограничений по симметрии.

Лучевая модель описывает пучок как совокупность лучей, плотность распределения которых зависит от линейных и угловых координат в пространстве. Так как с каждым лучом может быть связана приведенная яркость, инвариантная вдоль луча, то лучевая модель полностью эквивалентна функции распределения приведенной яркости от линейных и угловых координат, которая, в свою очередь, может рассматриваться как функция распределения Вигнера от функции взаимной когерентности частично-когерентного пучка.

Начнем с рассмотрения астигматического гауссового пучка, имеющего перетяжку и впоследствии расширим его описание на случай астигматическою гауссового пучка без перетяжки.

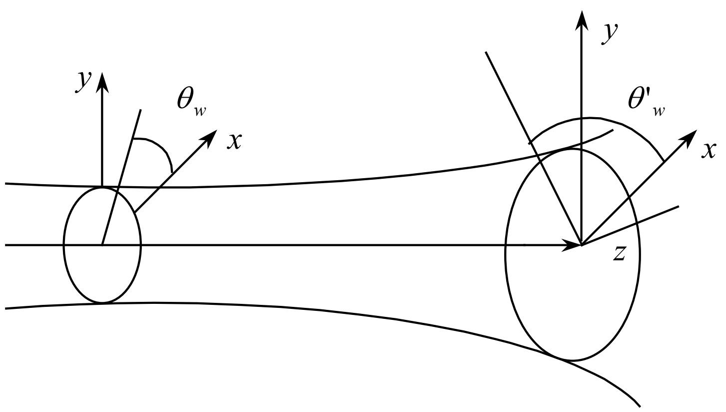
Яркость или плотность распределения лучей для астигматического гауссового пучка в перетяжке можно описать выражением:

$$L(r,s)\,|_{z=0} = L_0 \exp\left\{-2\left[r^T W_0^{-2} r + s^T V_0^{-2} s\right]\right\} \qquad (1)$$

где $r = (x,y)$, $s = (X,Y)$ – проекции радиус-вектора точки в пучке и оптического лучевого вектора направления на плоскость xy, $(X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2)$. W_0^2 и V_0^2 – действительные симметричные положительно определенные 2×2 – матрицы, характеризующие размеры и расходимость пучка в перетяжке. Легко увидеть, что матрицы линейных размеров W_0 и расходимости V_0 описывают эллипсы с соответствующим набором главных осей, т. е. $W_0 = \Phi_w \Lambda_w \Phi_w^T$, $V_0 = \Phi_v \Lambda_v \Phi_v^T$ и

$$\Phi_w = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix},\ \Phi_v = \begin{pmatrix} \cos\theta_v & -\sin\theta_v \\ \sin\theta_v & \cos\theta_v \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где Φ_w и Φ_v – ортогональные матрицы поворота осей эллипсов, θ_w – угол между осью абсцисс и главной осью эллипса линейных размеров (см. рисунок), θ_v – угол между осью абсцисс и главной осью эллипса расходимости. Λ_w и Λ_v – диагональные матрицы размеров полуосей эллипсов, индекс T – знак транспонирования. Таким образом, рассматриваемый пучок имеет в плоскости $z = 0$ перетяжку эллиптической формы с полуосями, равными элементам диагональной матрицы Λ_w и наклоненную под углом θ_w к оси x, из каждой точки этой перетяжки выходит пучок лучей, расходящийся в виде эллиптического гауссовою конуса с полуосями, равными элементам диагональной матрицы Λ_v, ориентированного под углом θ_v (см. рисунок).



Эллиптический гауссовый пучок с общим астигматизмом.

Рассмотрим распространение такого пучка в свободном пространстве. В плоскости $z = 0$ его координаты будут:

$s' = s,\ r = r' - s'z$

Подставляя эти координаты в выражение (1), получим новое выражение

$$L(r', s')\,|_{z\neq 0} = L_0 \exp\left\{-2\left[(r' - s'z)^T W_0^{-2} (r' - s'z) + s'^T V_0^{-2} s'\right]\right\} \qquad (3)$$

которое после очевидных алгебраических преобразований и отбрасывания штриха в координатах приобретает вид

$$L(r', s')\,|_{z\neq 0} = L_0 \exp\left\{-2\left[(s - \rho r)^T V^{-2} (s - \rho r) + r^T W^{-2} r\right]\right\} \qquad (4)$$

где

$$W^2 = (I + Z_0^{-2} z^2) W_0^2,\ V^2 = (I + Z_0^{-2} z^2)^{-1} V_0^2,$$
$$\rho^{-1} = R = (I + Z_0^2 z^{-2}) z \qquad (5)$$

W^2, V^2 – симметричные матрицы, описывающие линейные размеры пучка в плоскости $z \neq 0$ и его локальную расходимость; I – единичная матрица; ρ –

матрица приведенной кривизны фронта пучка; Z_0 – матрица, характеризующая свойства пучка и выражающаяся следующим образом:

$$Z_0 = (W_0^2 V_0^{-2})^{-1/2} \tag{6}$$

Матрицы ρ и Z_0 не обязательно симметричные.

Возникает вопрос, можно ли описать гауссовый пучок с астигматизмом при помощи матрицы комплексных параметров Q так же, как был описан круговой симметричный гауссовый пучок при помощи комплексного параметра в работе [5]. Детальные исследования показывают, что в общем случае мы наталкиваемся на непреодолимые трудности, однако для некоторых важных частных случаев это вполне возможно.

Первый случай соответствует астигматическому гауссовому пучку с перетяжкой, который распространяется через однородную среду или центрированную оптическую систему, но эллипсы линейных размеров и угловой расходимости имеют разные главные оси, т. е. W и V – не коммутационные матрицы. При этом ρ – не обязательно симметричная матрица.

Из выражения (5), можно получить, что этот астигматический гауссовый пучок удовлетворяет равенству

$$(W_0^2 V_0^{-2} = W^2 V_0^{-2} = Z_0^2 + z^2 \tag{7}$$

Введем матрицу комплексных параметров следующим образом:

$$Q^{-1} = \rho + iJW^{-2} = \rho + iV^2 J^{-1} \tag{8}$$

где J – матричный инвариант Лагранжа пучка, сохраняющий свои значения в процессе распространения и имеющий вид

$$J = (W^2 V^{-2})^{-1/2} W^2 = (W_0^2 V_0^{-2})^{-1/2} W_0^2 = Z_0^{-1} W_0^2 \tag{9}$$

или

$$J = (W^2 V^{-2})^{-1/2} V^2 = (W_0^2 V_0^{-2})^{-1/2} V_0^2 = Z_0^{-1} V_0^2$$

матрица Z_0 определяется из выражения (6).

Из выражений (5), (6) и (8) легко найти

$$Q = Iz - iZ_0 \tag{10}$$

где z – расстояние от перетяжки пучка до опорной плоскости. Можно заметить, что матрицы $Z_0 = (W^2 V^{-2})^{1/2}$, ρ , Q являются несимметричными.

Интенсивность такого пучка в произвольной плоскости может быть выражена через матрицу комплексных параметров Q формулой, аналогичной формуле для классического гауссового пучка, из выражений (4) и (8)

$$I(r) = I_0 \exp\left\{ ir^T J^{-1} (Q^{-1} - Q^{*-1}) r \right\} \tag{11}$$

Рассмотрим возможность применения к рассматриваемому случаю известного правила *ABCD* Когельника, как это сделано для кругового симметричного гауссового пучка в работах [5-9], т.е.

$$Q' = (AQ + B)(CQ + D)^{-1} \qquad (12)$$

где Q и Q' - матрицы комплексных параметров пучков соответственно до и после прохождения через оптическую систему; A, B, C, и D – произвольные матрицы; лучевая матрица C удовлетворяет условию симплектичности [10, 11], т.е. $AD^T - BC^T = I$, $A^T C - C^T A = 0$ и $B^T D - D^T B = 0$.

Из выражения (10) видно, что матрица комплексного параметра Q подчиняется правилу *ABCD* Когельника, когда такой гауссовый пучок распространяется в однородной среде

$$Q' = Q + It \quad \text{или} \quad Q' = (AQ + B)(CQ + D)^{-1} \qquad (13)$$

где $A = I,\ B = It,\ C = 0,\ D = I,\ t$ – приведенное расстояние. Легко также показать, что правило *ABCD* и инвариант Лагранжа справедливы также при распространении такого пучка через центрированную оптическую систему. Что касается децентрированных систем, то, к сожалению, матрица комплексных параметров Q рассматриваемого пучка подчиняется правилу *ABCD* Когельника только при преломлении пучка на границе между однородными средами. В этом случае компоненты лучевой матрицы состоят из подматриц $A = I$,$B = 0$ и C – произвольной матрицы. В соответствии с работами [6-8] отношение между линейными и угловыми координатами может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Подставляя выражение (14) в (4), получим

$$\rho' = \rho + C \qquad (15)$$

Из выражений (8) и (15) имеем в этом случае

$$Q' = Q(CQ + I)^{-1} = (AQ + B)(CQ + D)^{-1} \qquad (16)$$

Из выражения (16) можно видеть справедливость правила *ABCD* при преломлении. К сожалению, после преломления в общем случае, когда пучок теряет перетяжку, правило *ABCD,* инвариант Лагранжа J и матрица комплексных параметров Q неприменимы.

Второй важный случай, когда применимо понятие матрицы комплексных параметров, соответствует пучку, для которого матричное произведение W и V дает единичную матрицу, умноженную на некоторую константу. Причем в этом случае правило *ABCD* Когельника справедливо, как будет показано ниже, при распространении такого пучка через произвольную децентрированную оптическую систему.

Для такого пучка выполняется следующее условие:

$$V = J_0 W^{-1} \qquad (17)$$

где инвариант Лангранжа пучка J_0 представляет собой скаляр – произвольное число. Подчеркнем, что выражение (17) подобно выражению $V=(\lambda/\pi)W^{-1}$, справедливому для классического полностью когерентного гауссового пучка, для которого инвариант Лагранжа равен λ/π. Для рассматриваемого случая матрица Z_0 пучка является симметричной и может быть найдена из выражения $Z_0=W_0V_0^{-1}$ вместо более сложного общего выражения (6). Отметим, что W и V – всегда коммутационные матрицы, так как их главные оси всегда взаимно ортогональны после прохождения гауссового пучка через любую оптическую систему.

Введем матрицу комплексных параметров для описания такого гауссового пучка в следующем виде:

$$Q^{-1}=\rho+iJW^{-2}=\rho+iV^2J^{-1} \qquad (18)$$

где J – матричный инвариант Лагранжа, который выражается симметричной матрицей

$$J=WV=W_0V_0=J_0I \qquad (19)$$

Для полностью когерентного астигматического гауссового пучка $J_0=\lambda/\pi$ или число Френеля $F=J_0/\lambda=1/\pi$. Для частично когерентного астигматического гауссового пучка $J_0>\lambda/\pi$ или $F>1/\pi$. Из выражения (18) можно получить

$$Q=\tau-iJ^{-1}\alpha^2 \qquad (20)$$

где

$$\tau=\left(\rho+W^{-2}\rho^{-1}V^2\right)^{-1} \qquad (21)$$

$$\alpha^{-2}=W^{-2}+\rho^TV^{-2}\rho \qquad (22)$$

τ и α – симметричные матрицы, причем мнимая часть выражения (20) не изменяется при распространении пучка и однородной среде. В общем случае рассматриваемый пучок может не иметь перетяжки, если же он имеет перетяжку, то выражения (20), (21) и (22) могут быть значительно упрощены. Из выражений (5), (20) и (21) и (22) можно видеть, что при наличии перетяжки $\tau=zI$, $J^{-1}\alpha^2=Z_0=W_0V_0^{-1}$, т.е. $Q=Iz-iZ_0$.

Интенсивность такого пучка в какой-либо плоскости можно выразить при помощи матрицы комплексных параметров из выражений (4) и (18):

$$I(r)=I_0\exp\left\{iJ_0^{-1}r^T(Q^{-1}-Q^{*-1})r\right\} \qquad (23)$$

Кроме тою, можно видеть, что этот астигматический гауссовый пучок также удовлетворяет правилу *ABCD* Когельника. Сначала рассмотрим распространение такого астигматического гауссового пучка в однородной среде, т.е. в случае, когда $A=I$, $C=0$ и $D=I$. Подставляя выражение

$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ s' \end{pmatrix}$ в (4), с учетом того, что $J = WV = W'V' = J_0 I$, а также принимая во внимание выражение (18), получаем следующие уравнения:

$$V'^{-2}\, Q'^{-1} = V^{-2} Q^{-1} + B(Q^{-1} V^{-2} Q^{-1} - 2iJ^{-1} Q^{-1}) \quad (24)$$

$$Q'^{-1}\, V'^{-2}\, Q'^{-1} = Q^{-1} V^{-2} Q^{-1} - 2iJ^{-1}(Q^{-1} - Q'^{-1}) \quad (25)$$

Из выражений (24) и (25), имеем

$$Q' = Q + B = (AQ + B)(CQ + D)^{-1} \quad (26)$$

т.е. матрица комплексного параметра Q подчиняется правилу $ABCD$ Когельника.

Далее точно так же, как и для пучка общего вида, можно убедиться, что матрица комплексных параметров Q подчиняется правилу ABCD Когельника при преломлении на границе между однородными средами. Заметим, что в рассматриваемом случае ρ и Q всегда являются симметричными матрицами и правило $ABCD$ соблюдается и после преломления.

Таким образом, можно убедиться, что этот астигматический гауссовый пучок подчиняется правилу $ABCD$ Когельника так же, как и для случая кругового симметричного гауссового пучка, а полученные выражения полностью идентичны классическим формулам для когерентного астигматического гауссового пучка с матрицей расходимости $V_0 = (\lambda / \pi) W_0^{-1}$ [12].

Кроме того, из полученных выражений следует, что распространение частично когерентного гауссового пучка с длиной волны λ_0 и инвариантом Лагранжа J_0 полностью идентично распространению когерентного гауссового пучка с длиной волны $\lambda = J_0 \pi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolf E. Coltett E. Partially coherent sources which produce the same far-field intensity distribution as a laser // Opt. Commun. - 1978. - Vol. 25. -P.293-296.
2. Simon R.., Sudarshan E.C.G., Mukunda N. Anisotropic Gaussian Schell-model fields: passage through first order systems and associated invariants // Phys. Rev. A. - 1985. - Vol. 31. - P. 2419-2434.
3. Turunen J., Friberg A.T. Matrix representation of Gaussian Schell-model beams in optical systems // Optics and Laser Technology. - 1986. - Vol. 18. -P.259-267.
4. Sundar K., Mukunda N., Simon R.. Coherent-mode decomposition of general anisotropic Gaussian Schell-model beams // JOSA. A. - 1995. - Vol. 12. - P. 560-569.
5. Родионов С.А., Вон Дон Чжу, Ми Сук Чжун. Оптика негомоцентрических световых пучков // Оптический журнал. - 1997. - Т. 64, № 8. - С. 28-31.
6. Brouwer W. Matrix methods in optical instrument design. - N.Y.: Benjamin, Inc., 1964.
7. Gerrard A., Burch J.M. Introduction to Matrix Method in Optics. - London: A. Willy-Interscicncc pub., 1975.
8. Kogelnik H. On the propagation of Gaussian beams of light through lens like media including those with a loses or gain variation // Appl. Opt. - 1965. -Vol. 4. - P. 1562.
9. Kogelnik H., Li T. Laser Beam and Resonators // Proc. IEEE. - 1966. - Vol. 54. - P. 1312-1329.

10. Deschamps G.A. Ray techniques in electromagnetics // Proc. IEEE. -1972. - Vol. 60. - P. 1022-1035.
11. Bastiaans M.J. Wigner distribution and its application to first-order optics // JOSA. A. - 1979. - Vol. 69. -P. 1710-1716.
12. Джамийкова Ц.В., Родионов С.А. Матричная форма описания гауссового эллиптического пучка // Изв. вузов СССР. Сер. Приборостроение. - 1987. - Т. 30, № 8. - С. 67-71.