МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ КОНТРОЛЯ ОПТИКИ – ОБЩИЙ ПОДХОД

С.А. РОДИОНОВ - доктор технических наук

Проблема контроля оптики рассмотрена как математическая задача определения неизвестных параметров математической модели исследуемого объекта (неоднородности материала, формы оптической поверхности, аберраций оптических систем) по экспериментальным данным, определяемым конкретной схемой контроля. Выделены этапы решения задачи, сформулирована цель оптимизации схемы контроля как минимизация числа обусловленности структурной матрицы.

Проблемам контроля оптики, и том числе различным аспектам обработки результатов измерений посвящено много работ, однако, в них рассматриваются пусть и важные, но частные задачи. В настоящей статье предлагается общин подход, Позволяющий едиными математическими моделями описать самые разнообразные методы и схемы контроля и оценить их качество, что особенно важно при компьютеризации контроля.

Математические модели объектов контроля

Исходя из соображения максимальной общности мы будем рассматривать наиболее сложные, многопараметрические задачи, такие как контроль формы оптической поверхности, контроль неоднородности оптических материалов, контроль аберрации оптических систем. Более простые задачи легко получаются из рассмотренных как частные случаи.

Легко увидеть, что все вышеперечисленные объекты описываются функцией от нескольких переменных, так при контроле формы поверхности имеем функцию от двух переменных

$$f(x,y)=\Delta l(x,y) \qquad (1)$$

где Δl – деформация поверхности относительно номинала, удобнее всего рассматривать ее вдоль нормали к номинальной поверхности, x, y – координаты точки на поверхности x, $y\in\Omega$, Ω – рабочая область поверхности.

При контроле неоднородности материала мы в общем случае имеем функцию трех переменных:

$$f(x,y,z)=\Delta n(x,y,z) \qquad (2)$$

где Δn – отклонение показателя преломления от номинала x, y, z – координаты точки в контролируемом объеме Ω.

При контроле аберрации оптических систем в наиболее общем случае искомая математическая модель есть функция, описывающая зависимость волновой аберрации от полевых σ_x, σ_y зрачковых ρ_x, ρ_y и спектральных χ координат:

$$f(\chi,\sigma_x,\sigma_y,\rho_x,\rho_y)=\omega(\chi,\sigma_x,\sigma_y,\rho_x,\rho_y) \qquad (3)$$

определенных на областях поля Ω_F, зрачка Ω_P и спектрального интервала Ω_L. Области Ω, Ω_F, Ω_P, Ω_L в выражениях (1), (2) и (3), как правило, имеют простую форму круга, эллипса или прямоугольника. Для использования указанных моделей удобно нормировать переменные в предыдущих формулах так, чтобы они на границах областей имели бы единичные значения (привести их к каноническому виду). В таких канонических переменных области их определения будут кругом единичного радиуса, квадратом или кубом с вершинами, имеющими координаты ±1. Таким образом, обобщенная математическая модель контролируемого объекта есть функция

$$f(\vec{r}) \tag{4}$$

где $\vec{r}$ многомерный вектор канонических координат, определенных на канонической многомерной области Ω_0.

Численная модель контролируемого объекта

Задача контроля получить конкретные значения какого-либо численного описания контролируемого объекта, т. е. функции (4). Самым простым и распространенным способом, особенно ранее ранее, было представить функцию (4) совокупностью ее значений $f_k = f(\vec{r}_k)$, $k = 1,...M$ в достаточно густой сетке узлов $\vec{r}_k$ распределенных по области Ω_0. Далее из такого описания легко получить любое наглядное графическое представление, например, совокупность графиков, трехмерное представление, карты уровней и т. д. Серьезным недостатком этого способа является, во-первых, явная избыточность описания, а во-вторых, затрудненность выделения отдельных типов ошибок в измеряемом объекте, например, отдельных аберраций, и затем исключения этих ошибок, например, наклонов и смещений поверхностей, дефокусировок и комы, при контроле аберраций и т. д.

Более удобным является численное описание модели (4) в виде совокупности значений коэффициентов C_k ее разложения по некоторому базису:

$$f(\vec{r}) = \sum_k C_k P_k(\vec{r}) \tag{5}$$

Удобнее всего взять в качестве базиса полиномы, ортогональные на области Ω_0, например, для круглой формы этой области – широко употребляемые в оптике полиномы Цернике, для квадратной – полиномы Лежандра и т. д. В сложных случаях, однако, такое описание не является вполне удачным, поскольку не учитывает особенностей функции (4) и требует поэтому для адекватного описания крайне большого количества коэффициентов. В этом случае целесообразно дополнить описание (5) коэффициентами разложения по некоторым наборам "специальных" функций:

$$f(\vec{r}) = \sum_k C_k P_k(\vec{r}) + \sum_i \gamma_j Q_j(\vec{r})$$

В качестве примеров можно привести функции, описывающие локальные деформации поверхности или локальные неоднородности стекла, сосредоточенные в небольших по размеру областях своего определения Ω_j, также разрывные вне областей Ω_0 функции, наиболее адекватным образом описывающие некоторые типы деформации, например, кольцевых поверхностей, или функции, описывающие мелкоструктурные неоднородности типа "ряби" н т.д. Вопрос об оптимальном наборе таких "специальных" функций в настоящей статье не обсуждается. Итак, будем считать численным описанием искомой модели совокупность значений, т. е. многомерный вектор $\vec{c}$ коэффициентов разложения модели (4) по ортогональным и при необходимости "специальным" функциям:

$$\vec{c}^{\,T} = (c_1, ...c_k, ..., \gamma_1 \gamma_j, ...) \tag{6}$$

где вектор $\vec{c}$ разделен на две части - одну, относящуюся к ортогональному базису, и другую к специальному базису (*T* – индекс транспонирования). Имея значения коэффициентов, мы можем далее построить какое угодно представление функции (4) и произвести с ним любые преобразования.

Использование модели (6) даст и еще одну очень полезную возможность: упростить схему контроля, если известна априорная информация о контролируемом объекте. Например, если из предварительных исследований известно, что в контролируемой оптической системе телескопа в качестве неизвестных ошибок могут иметь место только смещения и наклоны вторичного зеркала и линзового компенсатора, (а ошибки, например, формы поверхности главного зеркала измерены заранее и известны), мы можем путем предварительного численного моделирования выяснить, какие из коэффициентов изменяются при наличии указанных выше ошибок и находить в процессе контроля только их, остальные полагая неизменными, предварительно определенными численным моделированием в "номинальном" для данного акта контроля состояния системы.

Математическая модель схемы контроля

Любая схема контроля, будь то интерферометрическая гартмановская и т.д., позволяет в конечном итоге зарегистрировать некоторое распределение какой-либо физической величины на некоторой поверхности регистрации (фотопластинке, фотопленке, матричном приемнике). При амплитудной регистрации – это распределение освещенности, при фазовой регистрации – распределение фаз. Естественно, что это распределение зависит or измеряемых параметров контролируемого объекта, иначе схема контроля была бы бессмысленной, причем эта зависимость является весьма сложной, нелинейной; т. е. в общем случае работу схемы контроля можно описать, вообще говоря, нелинейным оператором *R,* связывающим указанное распределение $\varphi(\vec{r})$ и исследуемую модель (4):

$$\varphi(\vec{r}\,') = R\left[f(\vec{r})\right] \tag{7}$$

Общая задача математической обработки результатов регистрации наблюдаемой в схеме контроля картины $\varphi(\vec{r})$ есть нахождение обратного оператора, т. е.

$$f(\vec{r}) = R^{-1}\left[\varphi(\vec{r}\,')\right]$$

что в общем случае при нелинейном характере оператора *R* представляет собой чрезвычайно сложную проблему. Исключению нелинейности и переходу к линейному оператору служит процесс первичной обработки регистрируемой картины, когда, например, от распределения интенсивности в интерферограмме переходят к координатам точек в максимумах интерференционных полос ("измерение" интерферограммы), от распределения интенсивностей на гартманограмме к координатам центров "следов" лучей ("измерения" гартманограммы) и т. д. В случае интерферограммы мы имеем после первичной обработки значения разности фаз интерферирующих фронтов в некотором наборе точек $\vec{r}_k'$, т. е. Распределение фаз $g(\vec{r}\,')$ по плоскости регистрации $\vec{r}\,'$ в случае гартманнограмм целью первичной обработки должно явиться получение отклонений $g(\vec{r}\,') = \Delta\vec{r}\,'(\vec{r})$ следов лучей от их номинальных положении для различных значений координат отверстий на гартманновской диафрагме $\vec{r}_k'$. При фазовой регистрации интерферограмм первичная обработка сводится к восстановлению утраченного при регистрации целого числа периодов.

Таким образом, после первичной обработки вместо нелинейного оператора (7) мы имеем линейный оператор, для которого решение обратной задачи уже значительно проще:

$$g(\vec{r}\,') = L\left[f(\vec{r})\right] \tag{8}$$

где $g(\vec{r}\,')$ – некоторая, в общем случае, векторная величина, а $\vec{r}\,'$ совпадает с $\vec{r}$. Отличия $\vec{r}\,'$ от $\vec{r}$ вызванное "дисторсией" измерительной схемы, если они существенны, должны быть устранены также первичной обработкой по известным параметрам дисторсии.

Рассмотрим несколько примеров оператора (8).

Для интерферометра Физо, Тваймана-Грина:

$$g(\vec{r}) = \alpha\left[f(\vec{r}) + \Delta(\vec{r})\right]$$

Для ннтерферометра бокового сдвига *(* $\vec{a}$ – сдвиг):

$$g(\vec{r}) = \alpha\left[f(\vec{r}) - f(\vec{r} - \vec{a}) + \Delta(\vec{r})\right]$$

для метода Гартмана:

$$g(\vec{r}) = \alpha\frac{\partial\left[f(\vec{r}) + \Delta(\vec{r})\right]}{\partial\vec{r}}$$

для иитерферометрического контроля больших поверхностей по отдельным зонам ("субапертурам"):

$$g(\vec{r}) = \alpha\sum_k circ\left(\frac{\vec{r} - s_k}{a}\right)\left[f(\vec{r}) + \Delta_k(\vec{r})\right]$$

где a – размер субапертуры, s_k – координаты ее центра в *k*-ом положении.

В предыдущих выражениях $\Delta(\vec{r})$, $\Delta_k(\vec{r})$ – функции, описывающие неизвестные параметры (ошибки) схемы контроля, включая погрешности оптики, ошибки настройки и т д.

Заметим, что при наличии "специальных" функций в численной модели объекта контроля, рассмотренной в разделе "Численная модель контролируемого объекта", особенно функции, описывающих локальные ошибки, построить линейную модель схемы контроля не всегда возможно, поскольку в ней присутствуют неизвестные параметры формы, размеров и положения локальных областей существования "специальных" функций, которые нелинейно связаны с $g\,\vec{r}\,'$ подбор которых представляет собой эвристическую проблему. Поэтому пока мы не будем включать в модель (8) "'специальные" функции.

Численная модель схемы контроля

С учетом всего сказанного численная модель схемы контроля представляется линейным оператором, т. е. матрицей, связывающей два многомерных вектора

$$\vec{b} = A\,\vec{c} \tag{9}$$

где $\vec{c}$ – *n*-мерный вектор, содержащий неизвестные коэффициенты численной модели измеряемого объекта и неизвестные коэффициенты разложения погрешностей $\Delta(\vec{r})$ и $\Delta_k(\vec{r})$ измерительной схемы но соответствующему базису; $\vec{b}$ – m-мерный вектор, содержащий результаты первичной обработки регистрируемых данных; A – матрица размерами $m \times n,$ так называемая "структурная" матрица измерительной схемы. Она составлена из результатов применения оператора L из (8) ко всевозможным базисным функциям из (5):

$$A = (a_{ij}) = L\left[P_j(\vec{r}_i) \right]$$

где $\vec{r}_i$ – координаты "узлов", в которых известны значения $\vec{b}$.

Основной этап обработки результатов контроля

Эта обработка состоит в решении уравнения (9), т. е. в нахождении обратного оператора A^{-1}, (обратной матрицы): $\vec{c} = A^{-1}\vec{b}$. Так, матрица A в общем случае не квадратная и плохо обусловлена, то речь должна идти об обобщенном эффективном обращении [1, 3]:

$$\vec{c} = A_\varepsilon^{+}\vec{b}$$

Например, одним из способов обобщенного обращения является метод наименьших квадратов (МНК) с демпфированием: $A_\varepsilon^{+} = (A^T A + \varepsilon I)^{-1} A^T$ или метод сингулярного разложения, или метод ортогонализации и т.д. Все эти методы дают достаточно устойчивое решение.

Так же легко находятся и погрешности коэффициентов $\vec{c}$, т. е. в общем случае матрица ковариаций [3]

$$\operatorname{cov}(\vec{c}) = (A^T A)^{-1}\tau^2$$

где τ^2 – дисперсия данных (приведенных к одинаковой погрешности).

Теория МНК [2] дает возможность оценить качество измерительной схемы через степень обусловленности матрицы $A,$ связывающей относительную погрешность результатов с относительной погрешностью данных:

$$\frac{\left\|\delta\vec{c}\right\|}{\vec{c}} = \operatorname{cond} A \cdot \frac{\left\|\delta\vec{b}\right\|}{\vec{b}}$$

где $\operatorname{cond} A$ – число обусловленности матрицы A, равное отношению ее максимального и минимального сингулярных чисел [3]:

$$\operatorname{cond} A = \mu_{\max} / \mu_{\min}$$

Таким образом, оптимизация параметров схемы контроля математически формулируется как минимизация числа обусловленности структурной матрицы Если $\mu_{\min} = 0$, т. е. $\operatorname{cond} A = \infty$ структурная матрица вырождена и схема контроля должна быть перестроена. Это происходит, например, как известно, при попытке использовать ннтерферометр бокового сдвига только в одном направлении или схему Коммона в одной позиции. Для устранения вырожденоcти структурной матрицы достаточно добавить сдвиг в ортогональном направлении, контроль в схеме Коммона под другим углом или с поворотом измеряемой детали и т. д.

Таким образом, приведенный аппарат позволяет достаточно простыми средствами оценить и оптимизировать любые схемы контроля и построить процесс математической обработки данных контроля.

Литература

1. Хепсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов - М.: Наука, 1986. - С. 239.
2. Себер Дж. Линенный регрессионный анализ. - М.: Мир, 1980. - С. 456.
3. Форсайт Дж., Малькольлм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений - М.: Мир, 1980. - С- 280.