ОБ ОПИСАНИИ АБЕРРАЦИЙ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. А. Родионов

Рассмотрены основные свойства аберрационной функции в обобщенных координатах, введенной ранее автором для описания аберраций оптических систем. Получены универсальные выражения для производных этой функции по предметным и зрачковым координатам, параметрам фокусировки, а также для ее полных дифференциалов. Как следствия этих выражений получены условия изопланатизма, показано, что применяющиеся в настоящее время в технической оптике функции для описания аберраций и условия изопланатизма есть частные случаи рассмотренных.

В предыдущих работах автора [1,2] было показано, что как общая теория изопланатизма, основанная на ограничении пучков реальной апертурной диафрагмой, так и дифракционная теория оптического изображения приводят к необходимости описания аберраций оптических систем новой функцией, представляющей собой оптическую длину луча $AP_d A'_i$ (рис. 1), выходящего из точки A предмета, терпящего в общем случае излом в точке P_d его пересечения с апертурной диафрагмой и попадающего в точку A'_i идеального изображения точки A

$$\omega = \left[AP_d A'_i\right]. \qquad (1)$$

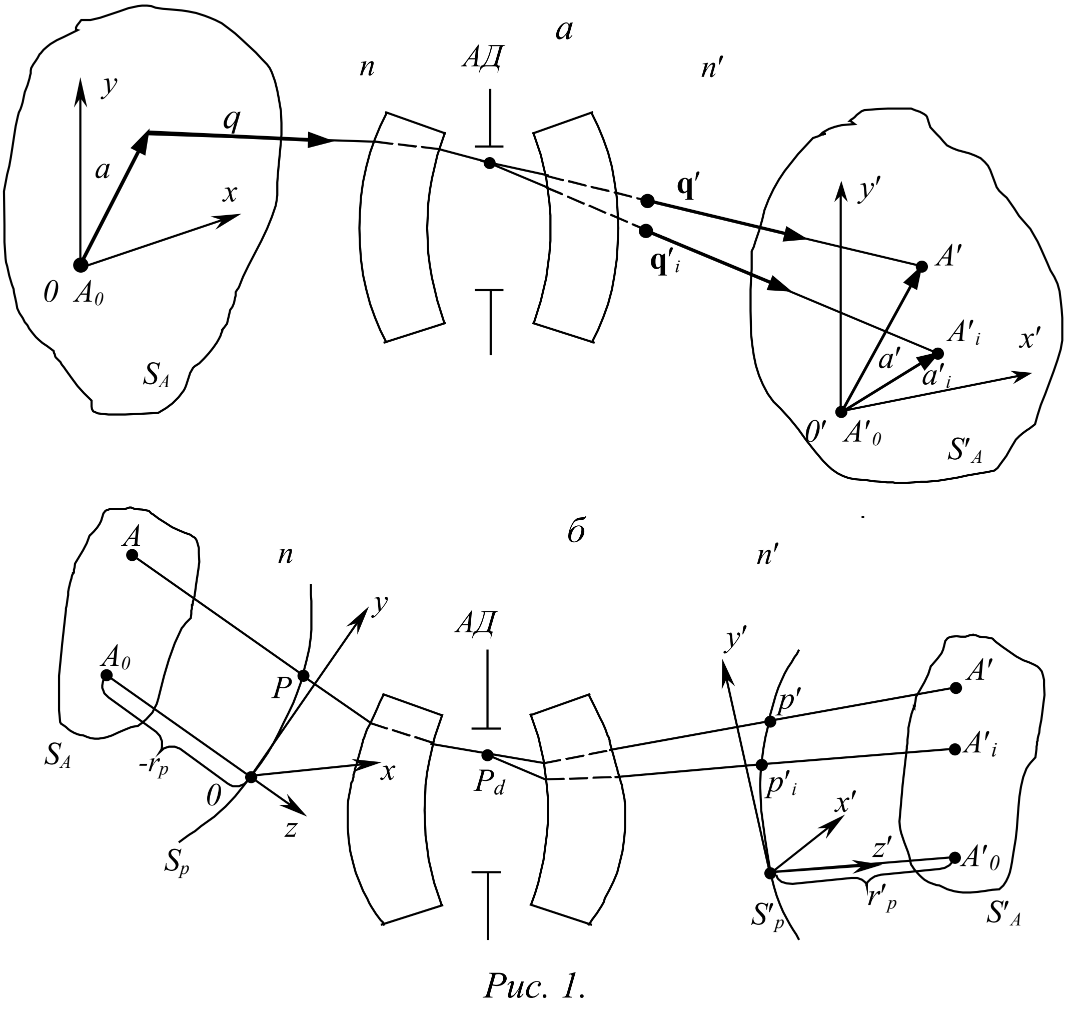

Рис. 1.

Аргументами функции являются векторы обобщенных координат на предмете или изображении $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и векторы обобщенных входных или выходных зрачковых координат $\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}'$. Обобщенные координаты $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ при этом определяются следующим образом. Для близкого предмета или изображения [1] (рис. 1, а)

$$\mathbf{x} = \mathrm{a}; \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a}'; \quad \mathbf{y} = n\mathbf{q}; \quad \mathbf{y}' = n'\mathbf{q}'_i, \qquad (2)$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ – двумерные радиус-векторы проекций точек А и А′ на координатные плоскости oxy и $o'x'y'$ соответственно, $\overline{\mathbf{q}}\ u\ \overline{\mathbf{q}}'_i$ – двумерные векторы проекций ортов $\overline{\mathbf{q}}\ u\ \overline{\mathbf{q}}'_i$ лучей на эти плоскости; n и n' – показатели преломления в пространствах предмета и изображения. Для удаленного предмета и изображения имеем (рис. 1, б)

$$\mathbf{x} = -r_p^{-1}\mathbf{a}; \quad \mathbf{x}' = -r'^{-1}_p\,\mathbf{a}'; \quad \mathbf{y} = n\mathbf{p}; \quad \mathbf{y}' = n'\mathbf{p}'_i, \qquad (3)$$

где r_p и r'_p – радиусы сфер S_p и S'_p, проведенных, через полюсы o, o' и имеющих центры в точках A_0 и A'_0 – центрах зон предмета и изображения, $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'_i$ – двумерные радиус-векторы проекций точек P и P'_i пересечения лучей AP_d и $P_dA'_i$ со сферами S_p и S'_p на координатные плоскости oxy и $o'x'y'$ соответственно.

В настоящей работе мы проанализируем основные свойства аберрационной функции (1), являющейся обобщением понятий волновой аберрации и эйконалов. Отметим полную симметрию приведенных определений по отношению к обращению хода лучей, т. е. инвариантность их при замене предмета на изображение; в силу этого достаточно рассмотреть свойства в пространстве изображений, чтобы свойства в пространстве предметов получить по аналогии. Эта инвариантность правильно отражает действительность, а именно обратимость оптических систем. Применяемые в настоящее время для описания аберраций эйконалы или волновая аберрация не обладают такой инвариантностью, что приводит к известным трудностям при трактовке теории оптического изображения [3].

Дифференциальные свойства аберрационной функции

В соответствии со сказанным выше аберрационная функция может быть представлена как функция любых двух пар различных координат

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y});\ \omega(\mathbf{x},\mathbf{y}');\ \omega(\mathbf{x}',\mathbf{y});\ \omega(\mathbf{x}',\mathbf{y}').$$

Рассмотрим дифференциал $d\omega_x$, соответствующий смещению точки предмета A на вектор $d\mathbf{x}$ по поверхности предмета, как показано на рис. 2 для близкого предмета. В силу принципа Ферма [4] оптические пути $[MP_d]$ и $[A_1P_d]$ отличаются на бесконечно малую величину высшего по отношению к $\|d\mathbf{x}\|$ порядка малости, поэтому

---

[1] В соответствии с определением, введенным ранее в работах [1, 2], под предметом или изображением близкого типа (на «конечном расстоянии») будем понимать такие, для которых координаты **x** или **x’** рассматриваются как линейные, для предмета или изображения удаленного типа (на «бесконечности») координаты **x** и **x’** рассматриваются как угловые, при этом расстояние до удаленного предмета или изображения не обязательно должно быть бесконечно велико, важно лишь восприятие их размеров как угловых.

$$d\omega_x = -[AM], \tag{4}$$

где M – основание перпендикуляра, опущенного на луч AP_d из смещенной точки A_1 предмета. Но отрезок AM, как нетрудно видеть, равен скалярному произведению вектора смещения $d\mathbf{a}$ и. орта луча $\mathbf{q}$, следовательно,

$$[AM] = nd\mathbf{a}^T\mathbf{q} = nd\mathbf{x}^T\mathbf{q}.$$

(В предыдущей формуле скалярное произведение записано в матричном виде, T – индекс транспонирования). В соответствии с определением (2) для близкого предмета окончательно имеем

$$d\omega_x = -d\mathbf{x}^T\mathbf{y} \text{ и, аналогично, } d\omega_{x'} = -d\mathbf{x}'^T\mathbf{y}'. \tag{5}$$

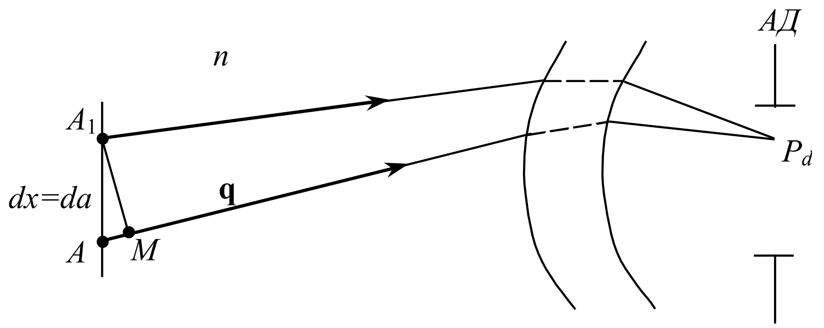

Рис. 2.

Тот же результат в обобщенных координатах можно получить и для удаленных предмета и изображения.

Формулами (5) можно пользоваться, если точка предмета A и точка идеального изображения A'_i смещаются на векторы $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$ независимо друг от друга, например, при подборе точки наилучшего изображения в присутствии аберраций. На самом деле $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$ не независимы, а связаны матрицей $\mathbf{V}$ обобщенных увеличении [[1, 5]],

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{V}d\mathbf{x}. \tag{6}$$

В этом случае из (5) и (6) получаем

$$d\omega_x = d\mathbf{x}^T(\mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}) \text{ или } \nabla\omega_x = \mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}, \tag{7}$$

где $\nabla\omega_x$ обозначает вектор градиента ω в пространстве $\mathbf{x}$ (с учетом (6)).

Выражение (7) описывает изменение аберраций при смещении предмета и представляет собой теорему изопланатизма, доказанную в [[1]] при аналитическом определении аберрационной функции.

Найдем теперь дифференциал аберрационной функции $d\omega_{y'}$ соответствующий изменению выходных зрачковых координат на $d\mathbf{y}'$. При этом точки A и A'_i предмета и идеального изображения остаются на месте, но луч смещается по апертурной диафрагме на вектор $d\mathbf{p}_d$ (рис. 3), входные и выходные зрачковые координаты изменяются на $d\mathbf{y}$ и $d\mathbf{y}'$. На рис. 3 $AP_dA'_i$ – реальный луч, $\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{x}' - V\mathbf{x}$ – вектор поперечных аберраций, $AP_dA'_i$ – идеальный луч, идущий в точку A'_i, $AP_d^1A'_i$ – новое положение идеального луча при изменении зрачковых координат на dy, dy^1.

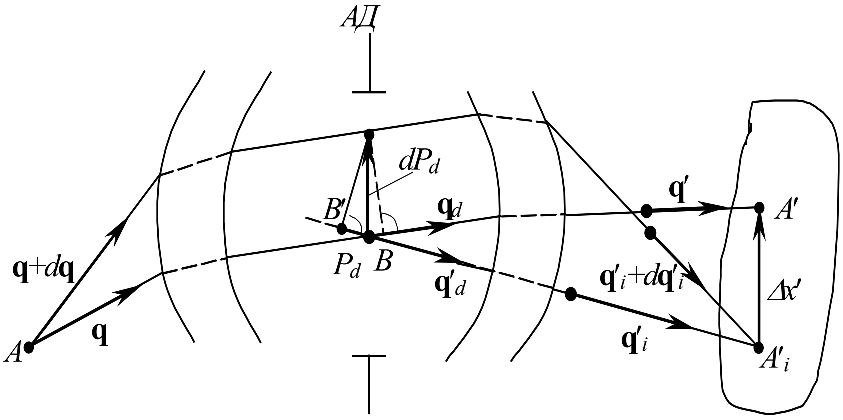

Рис.3.

В соответствии с принципом Ферма изменение оптической длины идеального ломаного луча при смещении на $d\mathbf{p}_d$ ограничится отрезками $[P_dB]$ и – $[P_dB']$ и составит

$$d\omega_{y'} = [P_dB] - [P_dB'] = n_d d\bar{\mathbf{p}}_d^T(\bar{\mathbf{q}}_d - \bar{\mathbf{q}}'_d) = n_d d\bar{\mathbf{p}}_d^T \Delta\bar{\mathbf{q}}_d\,, \qquad (8)$$

где $d\bar{\mathbf{p}}_d$ – вектор смещения точки P_d; $\bar{\mathbf{q}}_d, \bar{\mathbf{q}}'_d$ – орты реального и идеального лучей в пространстве апертурной диафрагмы, n_d – показатель преломления в этом пространстве. Поместим систему декартовых координат в точку P_d, так, чтобы плоскость oxy касалась поверхности диафрагмы.

Представим трехмерные векторы $d\bar{\mathbf{p}}_d$ и $\Delta\bar{\mathbf{q}}_d$ в следующем блочном виде:

$$d\bar{\mathbf{p}}_d = \begin{pmatrix} d\mathbf{p}_d \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta\bar{\mathbf{q}}_d = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{q}_d \\ \Delta Z_d \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

где $d\mathbf{p}_d$, $\Delta\mathbf{q}_d$ – двумерные векторы, проекции $d\bar{\mathbf{p}}_d$ и $\Delta\bar{\mathbf{q}}_d$ на плоскость oxy. Тогда из (8) получим

$$d\omega_{y'} = -n_d d\mathbf{p}_d^T \Delta\mathbf{q}_d\,. \qquad (10)$$

Если реальный луч P_dA' везде лежит в пределах гауссовой окрестности [6] идеального луча $P_dA'_i$, т. е. в пределах той области, в которой справедливы линейные соотношения между дифференциалами в пространстве диафрагмы и в пространстве изображений, то из общего оптического дифференциального инварианта [7] следует

$$n_d d\mathbf{p}_d^T \Delta\mathbf{q}_d = n' d\mathbf{q}'^T_i\, \Delta\mathbf{x}'\,.$$

Так как для рассматриваемого случая близкого изображения $n' d\mathbf{q}'_i = d\mathbf{y}'$, то из (10) следует

$$d\omega_{y'} = -d\mathbf{y}'^T(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x})\,,$$

или

$$\nabla\omega_{y'} = -\Delta\mathbf{x}' = -(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}) . \qquad (11)$$

Рассуждения для удаленного изображения аналогичны и дают те же результаты, что и (11), в обобщенных координатах. В силу симметрии определений (1)–(3) имеем еще два равенства

$$d\omega_{x'} = -d\mathbf{x}'^T\,(\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) \text{ или } \nabla\omega_{x'} = \mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}\,, \qquad (12)$$

$$d\omega_y = d\mathbf{y}(\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}') \text{ или } \nabla\omega_y = \mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}' = \Delta\mathbf{x}\,. \qquad (13)$$

В этих формулах $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}' = -\mathbf{V}^{-1}\Delta\mathbf{x}'$ есть вектор поперечных аберраций на поверхности предмета (в обратном ходе).

Итак, производные аберрационной функции по обобщенным зрачковым координатам (градиент на поверхности зрачка $\mathbf{y}$) есть поперечные аберрации, а производные ее по обобщенным предметным координатам (градиент на поверхности предмета $\mathbf{x}$), показывающие отступление от условия изопланатизма (короче, неизопланатизм), оказываются дисторсией в преобразовании зрачковых координат. Полученные формулы можно записать в следующей симметричной форме в виде полных дифференциалов

$$\left.\begin{aligned}
d\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= d\mathbf{x}^T\,(\mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}) + d\mathbf{y}^T\,(\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}'),\\
d\omega(\mathbf{x}',\mathbf{y}) &= d\mathbf{x}'^T\,(\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) + d\mathbf{x}(d\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}'),\\
d\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}') &= d\mathbf{x}^T\,(\mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}) + d\mathbf{y}'^T\,(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}),\\
d\omega(\mathbf{x}',\mathbf{y}') &= d\mathbf{x}'^T\,(\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) + d\mathbf{y}'^T\,(\mathbf{x} - \mathbf{V}\mathbf{x}).
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Подчеркнем, что полученные выражения являются точными, если величины поперечных аберраций не выходят за пределы гауссовой окрестности данного реального луча, что в большинстве практических случаев соблюдается.

Изменение аберрационной функции при фокусировке

Представим процесс фокусировки как продольное перемещение поверхностей предмета и изображения по нормалям к ним, при этом обобщенным параметром фокусировки *ds* или *ds'* для близкого предмета или изображения будем считать само перемещение *dz* или *dz'* в единицах длины (рис. 4), а для удаленного – изменение кривизны входной или выходной сфер $d\rho_p$ или $d\rho'_p$:

$$\left.\begin{aligned}
&ds = dz;\quad ds' = dz' \quad \text{(мм) для близкого предмета или изображения},\\
&ds = d\rho_p;\ ds' = d\rho'_p \quad \text{(килодптр) для удаленного предмета или изображения.}
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Из рис. 4 легко получать для пространства изображений

$$d\omega_{Z'} = n'dz'(Z'_i - 1) = n'dz'\frac{-\mathbf{q}'^T_i\,\mathbf{q}'}{1 + Z'_i}\,, \qquad (16)$$

где Z'_i – проекция орта $\bar{\mathbf{q}}'_i$ идеального луча на ось z', $\mathbf{q}'_i$ – двумерный вектор проекции этого орта на плоскость $o'x'y'$. Для близкого изображения в соответствии (2) и (15) $\mathbf{q}'_i = (1/n')\mathbf{y}'$; $dz' = ds'$. Для удаленного изображения в соответствии с (3) $\mathbf{q}'_i = -\rho'_p\,\mathbf{p}'_i = -(1/n')\rho'_p\,\mathbf{y}'$ и в соответствии с (15) $qz' = -ds'/\rho'^2$.

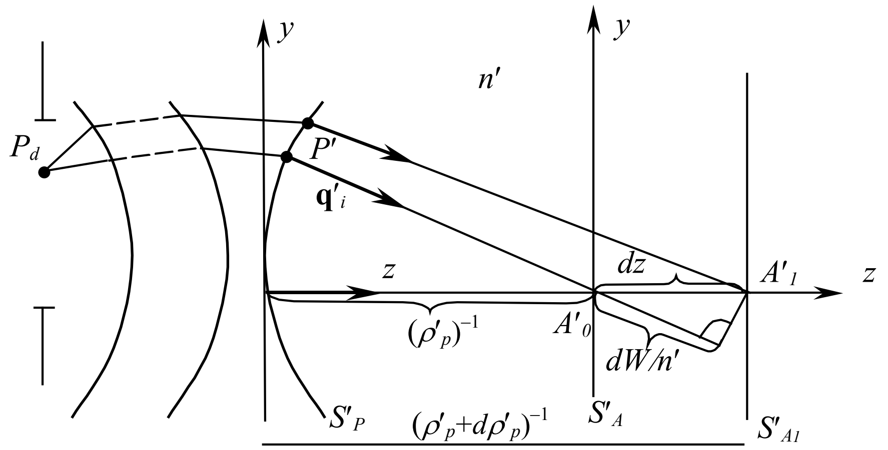

Рис. 4.

Подставляя эти результаты в (16) получим обобщенную формулу, справедливую для обоих типов изображения

$$\frac{\partial\omega}{\partial s'} = \frac{\mathbf{y}'^T\,\mathbf{y}'}{n'(1+Z'_i)}(-1)^i, \tag{17}$$

где $\mathbf{y}'$ – вектор обобщенных выходных зрачковых координат, определяемых формулами (2) или (3), i – признак типа изображения, i == 1 – для близкого изображения, $i = 0$ – для удаленного. В силу симметрии определений (1)–(3) можно записать аналогичное обобщенное выражение для пространства предметов

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}{n(1+Z)}(-1)^{0+1}, \tag{18}$$

где O – признак типа предмета.

Условия изопланатизма и преобразования зрачковых координат

Неизопланатизм оптических систем заключается в изменении аберраций при смещении предмета, поэтому в соответствии с [1] величина неизопланатизма определяется производной аберрационной функции по координате предмета $\mathbf{x}$. Общее выражение (7) связывает эту производную с преобразованием зрачковых координат и позволяет получить различные формулировки условий изопланатизма.

В наиболее строгом случае изопланатизм предусматривает независимость аберрационной функции от координаты предмета $\mathbf{x}$, и строгое условие изопланатизма получается приравниванием (7) нулю

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{x}} = \mathrm{V}^T \mathrm{y}' - \mathrm{y} = 0 \text{ или } \mathrm{y}' = \mathrm{V}^{T-1}\mathrm{y}. \tag{19}$$

В большинстве случаев (при некогерентном освещении) на структуру изображения не влияет постоянная по зрачку составляющая аберрационной функции, а лишь ее производные $d\omega/d\mathbf{y}'$ следовательно, при этом условие изопланатизма (менее жесткое, чем (19)) получается в дифференциальном или разностном виде

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \mathrm{x}' \partial \mathrm{y}'} = \frac{\partial \Delta \mathrm{x}'}{\partial \mathrm{x}'} = \Delta_I = \left(\mathrm{V}^T \frac{\partial \mathrm{y}'}{\partial \mathrm{y}} \right)^{-1} - \mathrm{I} = 0, \tag{20}$$

где $d\mathbf{y}'/d\mathbf{y}$ – матрица производных (матрица Якоби) вектора выходных зрачковых координат по входным, **I** – единичная матрица. Заметим, что в левой части (20) стоит по сути дела относительное изменение поперечных аберраций (по отношению к смещению изображения), поэтому матрицу Δ_I можно назвать матрицей относительного неизопланатизма. Величина относительного неизопланатизма определяется нормой матрицы Δ_I.

Полученные условия (19) и (20) есть наиболее общие формулировки изопланатизма в оптических системах, при этом выражение (19) одновременно определяет преобразование обобщенных зрачковых координат, выполняемое любой оптической системой при соблюдении изопланатизма, как мы видим, это преобразование линейно, причем обратно транспонированное по отношению к преобразованию между координатами на предмете и изображении. Отступления от этого преобразования, определяемые величиной относительного неизопланатизма, в практических случаях не превышают нескольких процентов.

Условие (20) применимо к произвольным оптическим системам и к любым зонам предмета. Существующие в оптике условия изопланатизма охватывают лишь случай осевой зоны центрированных оптических систем с круговой симметрией. В этом случае вместо матрицы **V** и векторов **x**, **x**', **y**, **y**', Δ**x**' имеем соответствующие скаляры, причем определения (2) и (3) обобщенных зрачковых координат приобретают вид

$$\left.\begin{array}{ll} y = -n\sin\sigma; \quad y' = -n'\sin\sigma'_i & \text{для близкого предмета или изображения,} \\ y = nh; \; y' = n'h' & \text{для удаленного предмета или изображения,} \end{array}\right\} \tag{21}$$

где σ, σ'_i – углы, образованные с осью системы определенным выше ломаным лучом, h, h' – высоты точек пересечения этого луча со сферами S_p и S'_p (рис. 5).

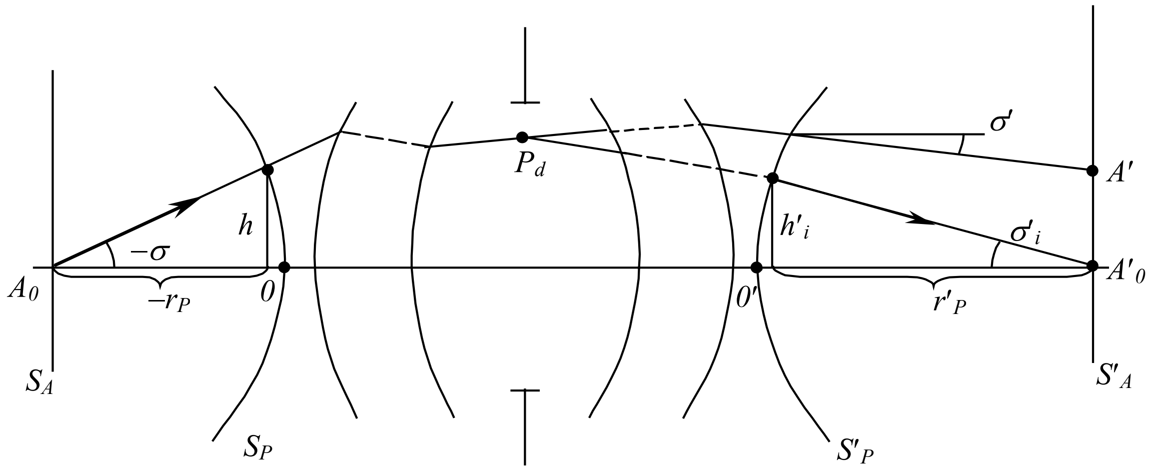

Рис.5.

Условие изопланатизма (20) при этом запишется в следующей форме, похожей на закон синусов Аббе

$$\delta_i = \frac{y}{\upsilon_0 y'} - 1 = 0 \qquad (22)$$

или в дифференциальной форме

$$\delta_i = \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{1}{\upsilon_0} - 1 = 0\,. \qquad (22a)$$

Так, для предмета и изображения близкого типа («репродукционная система» [7, 8]) условие (22) в соответствии с (21) запишется в виде

$$\delta_i = \frac{n sin\sigma}{\upsilon_0 n' sin\sigma'_i} - 1 = 0\,. \qquad (23)$$

Для системы типа «фотографический объектив» с удаленным предметом и близким изображением, если расстояние до предмета бесконечно велико, в соответствии с [8] обобщенное увеличение становится равным переднему фокусному расстоянию $V_0 = f = -(n/n')f'$, и условие изопланатизма (22) с учетом (21) приобретает следующую форму:

$$\delta_i = \frac{h}{f' sin\sigma'_i} - 1 = 0\,. \qquad (24)$$

Аналогичные формулы можно записать и для других типов оптических систем – «телескопической системы» и «микроскопа». Отличие формул (22) и (23) от классического закона синусов Аббе заключается в том, что угол σ'_i относится не к реальному лучу, имеющему в общем случае аберрации, а к «идеальному», идущему из точки пересечения реального луча с апертурной диафрагмой в центр изображения. Благодаря этому условия (23), (24) и аналогичные им становятся справедливыми не только в безаберрационных системах, как закон синусов Аббе, но и при наличии любых аберраций, т.е. заменяют собой условия Штебле-Лигоцкого и другие условия изопланатизма. В соответствии с этим формулу (22) и вытекающие из нее (23) и (24) можно назвать обобщенным законом синусов.

Аналогичное рассмотрение изменения аберраций при расфокусировке для точки на оси систем с круговой симметрией приводит к условию продольного изопланатизма (в системах типа «11»):

$$\frac{\sqrt{n}sin\dfrac{\sigma}{2}}{v_0\sqrt{n'}sin\dfrac{\sigma_i}{2}}-1=0\,.$$

Эту формулу можно назвать обобщенным условием Гершеля, в отличие от классического [9] оно справедливо при наличии любых аберраций, а не только в идеальном случае.

Приведенный анализ показывает, что описание аберраций оптических систем при помощи предложенной аберрационной функции в обобщенных координатах позволяет получить простые и в то же время универсальные соотношения, справедливые для любых типов и классов оптических систем. В частных случаях (в зависимости от положения изображения апертурной диафрагмы) аберрационная функция и условия изопланатизма переходят в известные функции и условия. Так, если апертурная диафрагма сопряжена с выходной сферой, то ω становится тождественной волновой аберрации, а условие (22) – условию Гопкинса [10], если точки P_d пересечения лучей с апертурной диафрагмой сопряжены с основаниями перпендикуляров, опущенных на лучи из центра выходного зрачка, условие изопланатизма (22) становится эквивалентно условию Штебле–Лигоцкого или Велфорда [11], если точки P_d сопряжены с точками, находящимися на расстоянии r'_p от точек пересечения лучей с плоскостью изображения, то ω переходит в эйконал Зейделя-Шварцшильда, а условие (22) в дифференциальной форме – в условие Слюсарева [12]. Если точка пересечения луча с диафрагмой сопряжена с бесконечностью, что ω переходит в смешанный эйконал [9], а условие (22) – в условие синусов Аббе. Таким образом, применимость того или иного описания аберраций или справедливость того или иного условия изопланатизма целиком определяется не соображениями удобства или соглашением, как иногда считают [11], а положением в пространстве изображений точек, сопряженных апертурной диафрагме. В реальных системах эти точки в большинстве случаев не могут быть определены однозначно, поэтому ни одна из перечисленных функций и ни одно из частных условий изопланатизма не применимы, так как не соответствуют физической реальности, таким образом, именно требование соответствия реальности приводит к необходимости описания аберраций оптических систем функцией (1) в координатах (2), (3).

Литература

1. С. А. Родионов. Опт. и спектр. 46. 1979. 556.
2. С. А. Родионов. Опт. и спектр., 46. 1979. 776.
3. W. Eich1er. Feingeratetechnik. 22. 1973 422.

4. М. Берн, Э. В о л ь ф. Основы оптики. М. «Наука». 1970.
5. С. А. Родионов. Изв. вузов, приборостроение 20. № 10. 1977. 117.
6. С. А. Родионов. Опт. и спектр., 50. 1981. 969.
7. М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. ИЛ. М. 1962.
8. С. А. Родионов. Тр. ЛИТМО. вып. 75. 1974. 36
9. А. И. Тудоровскии. Теория оптических приборов, I часть. АН СССР. М.–Л. 1948.
10. H. H. Hopkins. Proc. Phys. Soc. 58. 1948. 92.
11. W. T. Welford. Opt. Comm.3. 1971. 1.
12. Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. Л. «Машиностроение». 1968.