МАТРИЧНЫЙ АППАРАТ ГАУССОВОЙ ОПТИКИ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛУЧА

С. А. Родионов

Рассматривается матричная форма соотношений гауссовой оптики для окрестности произвольного луча в произвольной оптической системе. Исследованы свойства гауссовой матрицы, связывающей четырехмерные векторы падающего и выходящего лучей линейным преобразованием. Показано, что из самых общих требований оптического смысла этого преобразования вытекает возможность представить его в виде двух независимых двумерных преобразований, аналогичных таковым для центрированных оптических систем в гауссовой области. При этом свойства системы в окрестности луча определяются девятью параметрами – фокусными расстояниями и фокальными отрезками в двух взаимно перпендикулярных главных сечениях и углами поворота этих сечений относительно базовых систем координат.

Гауссова оптика в параксиальной области в центрированных оптических системах с недавнего времени [1, 2] стала описываться в терминах матричной алгебры, и такой подход оказался весьма плодотворным и универсальным; представляется полезным развить его на случай произвольного луча в произвольной оптической системе.

Пусть имеется некоторый луч, проходящий через произвольную оптическую систему (рис. 1), где $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ – орты направления луча в пространствах предметов и изображений, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ – радиус-векторы некоторых точек A и A' на луче в системах декартовых координат $oxyz$ и $o'x'y'z'$; $\mathbf{q}^T=(X,Y,Z)$; $\mathbf{q}'^T=(X',Y',Z')$; $\mathbf{a}^T=(x,y,z)$; $\mathbf{a}'^T=(x',y',z')$; $\|\mathbf{q}\|=1$; $\|\mathbf{q}'\|=1$. В предыдущих выражениях T – индекс транспонирования, $\|\ \|$ – евклидова норма. Пусть $\mathbf{q}+d\mathbf{q}$; $\mathbf{q}'+d\mathbf{q}'$; $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$; $\mathbf{a}'+d\mathbf{a}'$ – луч, близкий к данному, отличающийся от него на дифференциалы $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{q}'$, $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{a}'$ («дифференциал луча»). Известно, что множество лучей в пространстве четырехмерно, следовательно, каждый дифференциал луча определяется четырехмерными векторами: $d\mathbf{r}$ – в пространстве предметов и $d\mathbf{r}'$ – в пространстве изображений. В качестве компонент этих четырехмерных векторов выберем проекции на оси x, y и x', y' дифференциалов $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{q}$, . . .

$$d\mathbf{r}=\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ -dX \\ -dY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix};\ d\mathbf{r}'=\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ -dX' \\ -dY' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{h}' \\ \boldsymbol{\alpha}' \end{pmatrix},\ \text{где}\ \mathbf{h}=\begin{pmatrix} dx \\ xy \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}=-\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \qquad (1)$$

(знак «минус» у α взят для того, чтобы получить аналогию с правилом знаков в обычной гауссовой оптике). Пусть векторы $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{a}'$ лежат в плоскостях oxy и $o'x'y'$ соответственно, тогда $dz=dz'=0$ по определению, а dZ и dZ' определяются из условий ортогональности векторов $\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ и $d\mathbf{q}'$

$$d\mathbf{q}^T\mathbf{q} = d\mathbf{q}'^T\mathbf{q}' = 0 \tag{2}$$

Оптическая система каждому дифференциалу луча $d\mathbf{r}$ в пространстве предметов строит дифференциал $d\mathbf{r}'$ в пространстве изображений, таким образом, работа оптической системы в окрестности данного луча описывается оператором G, изображающим четырехмерный вектор $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r}' = G[d\mathbf{r}] \tag{3}$$

Для регулярных оптических систем существует окрестность луча, в которой оператор (3) линеен; эта окрестность соответствует гауссовой области вокруг луча. Линейный оператор типа (3) может быть представлен в виде матрицы. Таким образом, гауссовы характеристики системы в окрестности луча определяются квадратной матрицей $\mathbf{G}$ четвертого порядка

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{G}d\mathbf{r} \tag{4}$$

Рассмотрим самые общие свойства, которыми должна обладать эта матрица. Прежде всего отделим свойства, зависящие от выбора координат в пространстве предметов и изображений, для чего рассмотрим, как изменяется матрица $\mathbf{G}$ при изменении систем координат. Очевидно, что так как нас интересуют только дифференциалы луча, то без потери общности можно поместить начала o и o' на луч в точки A и A' тогда $\mathbf{a} = \mathbf{a}' = o$.

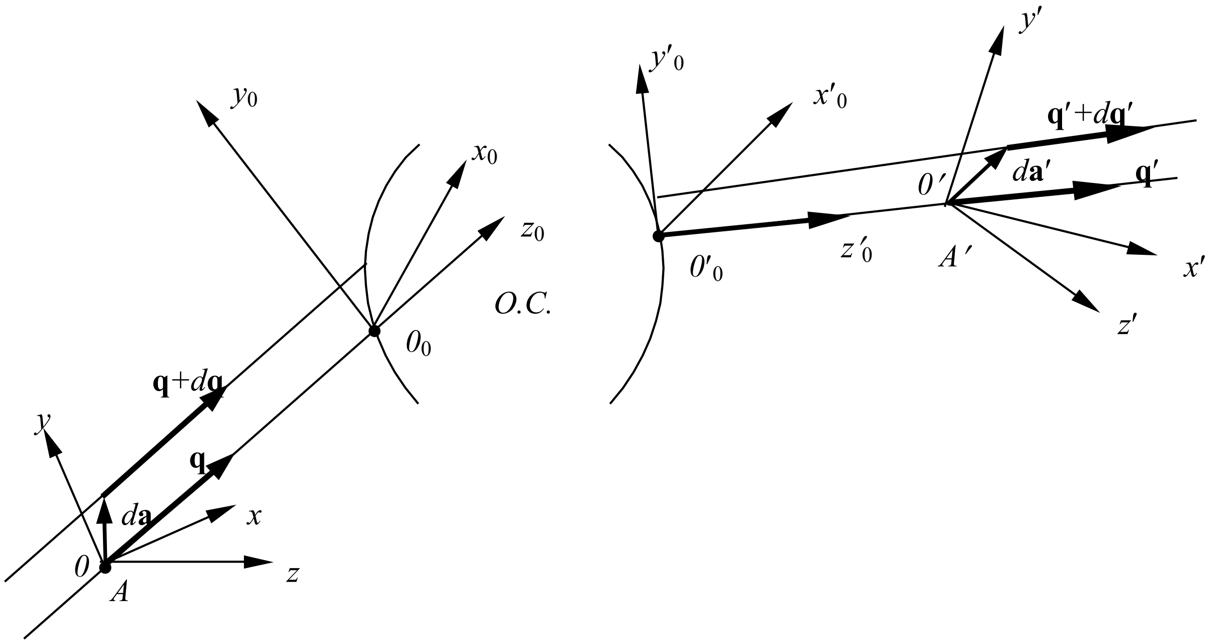

Рис.1.

Любые изменения систем координат можно свести к последовательности следующих элементарных преобразований: параллельного смещения вдоль луча на расстояние t (при этом ось z совпадает с лучом); поворота вокруг оси z на угол φ; поворота вокруг оси x на угол β (при этом ось x нормальна лучу $\mathbf{q}$).

Очевидно, что при смещении системы координат вдоль луча на расстояние t вектор линейного дифференциала луча $\mathbf{h}$ уменьшается на αt, вектор углового дифференциала α остается без изменений. Это соответствует умножению четырехмерного вектора $d\mathbf{r}$ слева на матрицу «смещения» $\mathbf{T}$

$$d\mathbf{r}_t = \mathbf{T}d\mathbf{r} \tag{5}$$

где $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I}t \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$; $\mathbf{I}$ – единичная подматрица второго порядка, $d\mathbf{r}$ – вектор луча в старой системе, $d\mathbf{r}_\mathrm{t}$ – в смещенной системе. Обратное преобразование описывается обратной матрицей $\mathbf{T}^{-1}$, причем, как нетрудно увидеть,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}t \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Обращаясь к выражению (4) и делая в нем замену векторов $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$ на векторы $d\mathbf{r}_\mathrm{t}$ и $d\mathbf{r}'_\mathrm{t}$ в смещенных системах, получим

$$\mathbf{T}'^{-1}\, d\mathbf{r}'_t = \mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}d\mathbf{r}_t \quad \text{или} \quad d\mathbf{r}'_t = \mathbf{T}'\mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}d\mathbf{r} \tag{6}$$

Таким образом, смещение систем координат эквивалентно умножению гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ справа на $\mathbf{T}^{-1}$, а слева на $\mathbf{T}'$.

Можно показать, что в общем случае, когда ось z не совпадает с лучом, матрица $\mathbf{T}$ имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{q}}\overline{\mathbf{q}}^T Z^{-2})t \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \tag{7}$$

где $\overline{\mathbf{q}}$ – двумерный вектор проекции луча $\mathbf{q}$ на плоскость оху, $\overline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Поворот систем координат вокруг оси z на угол φ описывается умножением двумерных векторов $\mathbf{h}$, α на ортогональные матрицы второго порядка $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. или четырехмерных векторов $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$ на ортогональные матрицы четвертого порядка

$$d\mathbf{r}_\varphi = \mathbf{R}d\mathbf{r}; \quad d\mathbf{r}'_\varphi = \mathbf{R}'d\mathbf{r}' \tag{8}$$

где

$$\underset{4\times4}{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{R}} & 0 \\ 0 & \underset{2\times2}{\mathbf{R}} \end{pmatrix}; \quad \underset{4\times4}{\mathbf{R}'} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{R}'} & 0 \\ 0 & \underset{2\times2}{\mathbf{R}'} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Обращаясь к (4), получим, что поворот систем координат вокруг осей z, z' соответствует умножению гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ справа на матрицу поворота $\mathbf{R}^\mathrm{T}$, а слева – на матрицу поворота $\mathbf{R}'$ (в силу ортогональности $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\mathrm{T}$)

$$\mathbf{G}_\varphi = \mathbf{R}'\mathbf{G}\mathbf{R}^T \tag{10}$$

Рассмотрим поворот вокруг оси x. При этом повороте трехмерный вектор $d\mathbf{a}$ перемещается так, чтобы все время оставаться в плоскости oxy, откуда вытекает следующее матричное выражение для связи $d\mathbf{a}_\beta$ и $d\mathbf{a}$:

$$d\mathbf{a}_\beta = \begin{pmatrix} dx_\beta \\ dy_\beta \\ dz_\beta = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz = 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X = 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dt \right]$$

где $c = \cos\beta$, $s = \sin\beta$, dt – расстояние между точками пересечений дифференциала луча с плоскостями oxy и $ox_\beta y_\beta$. Решая эту систему уравнений, получим

$$dx_\beta = dx; \quad dy_\beta = dy\frac{Z}{-sY + cZ} = dyZZ_\beta^{-1}$$

где $Z_\beta = -sY + cZ$ – проекция орта $\mathbf{q}$ основного луча на ось z повернутой системы. Итак, изменение вектора $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ при повороте системы вокруг оси x на угол β можно записать в виде матричного произведения

$$\mathbf{h}_\beta = \mathbf{Bh}$$

где $\mathbf{B}$ – диагональная матрица второго порядка: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ZZ_\beta^{-1} \end{pmatrix}$. Координаты трехмерного вектора $d\mathbf{q}$ при повороте вокруг x изменяются следующим образом:

$$d\mathbf{q}_\beta = \begin{pmatrix} dX_\beta \\ dY_\beta \\ dZ_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} \tag{11}$$

Но координата dZ находится из условия (2): $dZZ + dYY = 0$. Подставляя в (11), получим

$$\begin{pmatrix} dX_\beta \\ dY_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_\beta Z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \text{ или } \boldsymbol{\alpha}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$$

Переходя к четырехмерным векторам $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$ получаем, что при повороте систем вокруг осей x, x' эти векторы умножаются на диагональные матрицы четвертого порядка

$$d\mathbf{r}_\beta = \mathbf{B}d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r}'_\beta = \mathbf{B}'d\mathbf{r}' \tag{12}$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \omega^{-1} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \omega' & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \omega'^{-1} \end{pmatrix}, \ \omega = ZZ_\beta^{-1}, \ \omega' = Z'Z'^{-1}_\beta \tag{13}$$

а гауссова матрица $\mathbf{G}$ умножается справа на $\mathbf{B}^{-1}$, а слева на $\mathbf{B}'$.

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}'\mathbf{G}\mathbf{B}^{-1} \tag{14}$$

Легко убедиться в том, что ни одно из преобразований (6), (10), (14) не меняет определителя матрицы **G**.

Рассмотрим теперь свойства гауссовой матрицы, определяемые оптической системой. Очевидно, что преобразование (4) должно подчиняться закону Малюса-Дюпена [3]. Как показал Герцбергер [4], закон Малюса – Дюпена есть частный случай более общего требования инвариантности оптического дифференциала

$$n'\left[\left(d\mathbf{a}'^{T}_{U\,j}\,d\mathbf{q}'_{U\,i}\right)-\left(d\mathbf{a}'^{T}_{U\,i}\,d\mathbf{q}'_{U\,j}\right)\right]=n\left[\left(d\mathbf{a}^{T}_{U\,j}d\mathbf{q}_{U\,i}\right)-\left(d\mathbf{a}^{T}_{U\,i}d\mathbf{q}_{U\,j}\right)\right],\quad i=1{,}4,\ j=1{,}4 \qquad (15)$$

где $d\mathbf{a}_{U\,i}, d\mathbf{q}_{U\,j}$ – производные векторов по всевозможным параметрам u_i, u_j, определяющим лучи; n, n' – показатели преломления в пространствах предметов и изображений.

Запишем выражение (15) в матричном виде. Выберем в качестве параметров u_i, u_j, определяющих множество лучей, проекции четырехмерных векторов $d\mathbf{r}$, составленных из двумерных векторов $\mathbf{h}$, α. Тогда матрицы производных векторов $d\mathbf{a}_{U\,j}, d\mathbf{q}_{U\,j}$, по параметрам будут состоять из единичных и нулевых матриц

$$\left.\begin{aligned}\underset{2\times4}{\mathbf{H}}&=\left(d\mathbf{a}_{U\,i}\right)_{i=1,4}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underset{2\times2}{\mathbf{I}}&\underset{2\times2}{\mathbf{O}}\end{pmatrix}\\ \underset{2\times4}{\mathbf{A}}&=\left(d\mathbf{q}_{U\,i}\right)_{i=1,4}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underset{2\times2}{\mathbf{O}}&\underset{2\times2}{\mathbf{I}}\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Используя эти обозначения, можно записать (15) в матричной форме, включающей в себя все возможные дифференциальные инварианты

$$n'\left[\mathbf{H}'^{T}\,\mathbf{A}'-\mathbf{A}'^{T}\,\mathbf{H}'\right]=n\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{H}\right] \qquad (17)$$

В этом выражении левая и правая части представляют собой матрицы четвертого порядка. Рассмотрим правую часть равенства. Подставляя в нее (16), получим после матричных преобразований

$$n\left[\mathbf{H}^{T}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{H}\right]=n\begin{pmatrix}\mathbf{O}&\mathbf{I}\\-\mathbf{I}&\mathbf{O}\end{pmatrix} \qquad (18)$$

где **O** и **I** – подматрицы второго порядка.

Обращаясь теперь к левой части равенства (17), в силу линейности оператора (4), получаем с учетом (16)

$$\begin{pmatrix}\mathbf{H}'\\\mathbf{A}'\end{pmatrix}=\mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbf{H}\\\mathbf{A}\end{pmatrix}=\mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{I}\end{pmatrix}=\mathbf{G}\underset{4\times4}{\mathbf{I}}=\mathbf{G}\,. \qquad (19)$$

Следовательно, $\mathbf{H}'=(\mathbf{G}_{11}\mathbf{G}_{12})$, $\mathbf{A}'=(\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{22})$, где G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22} – подматрицы второго порядка гауссовой матрицы **G**, записанной в блочном (клеточном) виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Подставляя полученные выражения в левую часть инварианта (17), получим

$$n'\left[\mathbf{H}'^{T}\,\mathbf{A}' - \mathbf{A}'^{T}\,\mathbf{H}'\right] = n'\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^{T}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22}^{T}\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}^{T}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{22}^{T}\mathbf{G}_{12} \end{pmatrix} \tag{21}$$

Приравнивая левую (21) и правую (18) части и сравнивая их поблочно, получим четыре равенства, которым должна удовлетворять матрица **G**

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{11} = \mathbf{O}, \qquad \mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{12} = \frac{n}{n'}\mathbf{I}, \\ &\mathbf{G}_{12}^{T}\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22}^{T}\mathbf{G}_{11} = -\frac{n}{n'}\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_{12}^{T}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{22}^{T}\mathbf{G}_{12} = \mathbf{O} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Легко увидеть, что эти четыре равенства эквивалентны требованию симметричности четырех попарных произведений $\mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{21}$, $\mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{22}$, $\mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{12}^{T}\mathbf{G}_{22}$, а также выполнению равенства $\mathbf{G}_{11}^{T}\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^{T}\mathbf{G}_{12} = \frac{n}{n'}\mathbf{I}$. В каком случае произведение двух квадратных матриц, например, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и **B**, симметрично?. Приведем **A** и **B** в диагональную форму [5]

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_{A}\mathbf{\Lambda}_{A}\mathbf{V}_{A}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}_{B}\mathbf{\Lambda}_{B}\mathbf{V}_{B}$$

где $\mathbf{U}_A$, $\mathbf{U}_B$, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$ – ортогональны, Λ_A, Λ_B – диагональны. Тогда

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{B} = \mathbf{V}_{A}^{T}\mathbf{\Lambda}_{A}\mathbf{U}_{A}^{T}\mathbf{U}_{B}\mathbf{\Lambda}_{B}\mathbf{V}_{B}, \quad \mathbf{B}^{T}\mathbf{A} = \mathbf{V}_{B}^{T}\mathbf{\Lambda}_{B}\mathbf{U}_{B}^{T}\mathbf{U}_{A}\mathbf{\Lambda}_{A}\mathbf{V}_{A} \tag{23}$$

Если $\mathbf{A}^{T}\mathbf{B}$ – симметрично, то $\mathbf{A}^{T}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{T}\mathbf{A}$. Как следует из (23), для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{U}_A = \mathbf{U}_B$, $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B$, т. е. чтобы матрицы **A** и **B** были получены из некоторых диагональных матриц Λ_A и Λ_B умножением слева и справа на одинаковые ортогональные матрицы **U** и **V**. Но всякую ортогональную матрицу можно рассматривать как матрицу поворота системы координат на некоторый угол. Анализируя симметричность произведений всех пар подматриц (20), в соответствии с (22) приходим к выводу, что ортогональные матрицы **U** и **V**, диагонализирующие подматрицы $\mathbf{G}_{11}$, $\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{21}$, $\mathbf{G}_{22}$, должны быть одинаковы у всех подматриц. В соответствии с (10) это значит, что гауссова матрица системы **G** может быть приведена к форме, состоящей из диагональных подматриц, путем поворота систем координат в пространстве предметов и изображений вокруг осей z, z' на некоторые углы φ, φ'

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}'\mathbf{G}_{0}\mathbf{R}^{T} \tag{24}$$

где **R**, **R'** – ортогональные матрицы поворота вокруг осей z, z' вида (9), $\mathbf{G}_0$ – матрица, составленная из диагональных подматриц второго порядка,

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & y_{11} & 0 & y_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & y_{21} & 0 & y_{22} \end{pmatrix} \quad (25)$$

При этом условия (22) требуют выполнения двух равенств

$$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = \frac{n}{n'}, \quad y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12} = \frac{n}{n'} \quad (26)$$

Из (25) и (26) следует, что определитель матрицы **G** всегда равен $(n/n')^2$.

Введем перестановку в четырехмерных векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, а именно представим их в таком виде, чтобы первая пара их элементов соответствовала «x» – проекциям двумерных векторов **h** и α, а вторая пара – «y» – проекциям

$$d\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} dx \\ -dX \\ dy \\ -dY \end{pmatrix}; \quad d\mathbf{r}'_p = \begin{pmatrix} dx \\ -dX \\ dy \\ -dY \end{pmatrix} \quad (27)$$

Это соответствует умножению прежних векторов $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$ слева на матрицу перестановки

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Гауссова матрица $\mathbf{G}_0$ при этом должна умножиться слева и справа на матрицу **P**, при этом она приобретает диагонально-клеточный вид

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{matrix} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_x & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G}_y \end{pmatrix} \quad (28)$$

а преобразование (4) распадается на два независимых преобразования отдельно для x- и y-проекций векторов **h** и α, с гауссовыми матрицами этих преобразований $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$, размерности 2×2, т. е. точно так же, как для систем с двумя плоскостями симметрии

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dX' \end{pmatrix} = \mathbf{G}_x \begin{pmatrix} dx \\ dX \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dy' \\ dY' \end{pmatrix} = \mathbf{G}_y \begin{pmatrix} dy \\ dY \end{pmatrix} \quad (29)$$

Определители матриц $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$, как следует из (26), равны n/n'. Если кроме поворота вокруг осей z, z' необходимого для приведения матрицы G к виду (25), еще повернуть системы координат вокруг осей x, x' так, чтобы оси z, z' совпали с основным лучом, и поместить начала этих систем в точки пересечения луча с первой и последней поверхностями системы (как показано на рис. 1, системы $o_0x_0y_0z_0$ и $o'_0x'_0y'_0z'_0$), то элементы матриц $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$ приобретут тот же смысл, что и гауссовой матрицы второго порядка для центрированных систем, а именно [1, 2]

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} \dfrac{s'_{Fx}}{f'_x} & \dfrac{f_x f'_x - s'_{Fx} s_{Fx}}{f'_x} \\ \dfrac{1}{f'_x} & -\dfrac{s_{Fx}}{f'_x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} \dfrac{s_{Fy}}{f'_y} & \dfrac{f_y f'_y - s'_{Fy} s_{Fy}}{f'_y} \\ \dfrac{1}{f'_y} & -\dfrac{s_{Fy}}{f'_y} \end{pmatrix}$$

где $f_x, f'_x, f_y, f'_y, s_{Fx}, s'_{Fx}, s_{Fy}, s'_{Fy}$ – фокусные расстояния и фокальные отрезки вдоль главного луча в двух взаимно перпендикулярных сечениях, причем из (26) следует, что $f_x / f'_x = f_y / f'_y = -n / n'$

Назовем гауссову матрицу, соответствующую такому выбору координат в пространстве предметов и изображений, собственной гауссовой матрицей данной системы для данного луча. Гауссова матрица для любого другого выбора систем координат получается из собственной умножением слева и справа на нужную последовательность матриц $\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{T}'$, $\mathbf{R}'$, $\mathbf{B}'$.

Итак, из оптического смысла преобразования (4) вытекает, что оно полностью определяется девятью параметрами – фокусными расстояниями и фокальными отрезками в двух взаимно перпендикулярных сечениях и углами поворота этих сечений φ, φ' относительно базовых систем координат в пространствах предметов и изображений.

«Оптические» свойства гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ позволяют легко найти обратную ей матрицу $\mathbf{G}^{-1}$ обратного преобразования. Представляя $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^{-1}$ в блочном (клеточном) виде, перемножая их и пользуясь определением $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{I}$ и свойствами (22), легко получить

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{n'}{n} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{22}^T & -\mathbf{G}_{12}^T \\ -\mathbf{G}_{22}^T & \mathbf{G}_{11}^T \end{pmatrix} \tag{30}$$

Обращение собственной гауссовой матрицы $\mathbf{G}_0$, представленной в диагонально-клеточном виде (28), выполняется тривиально.

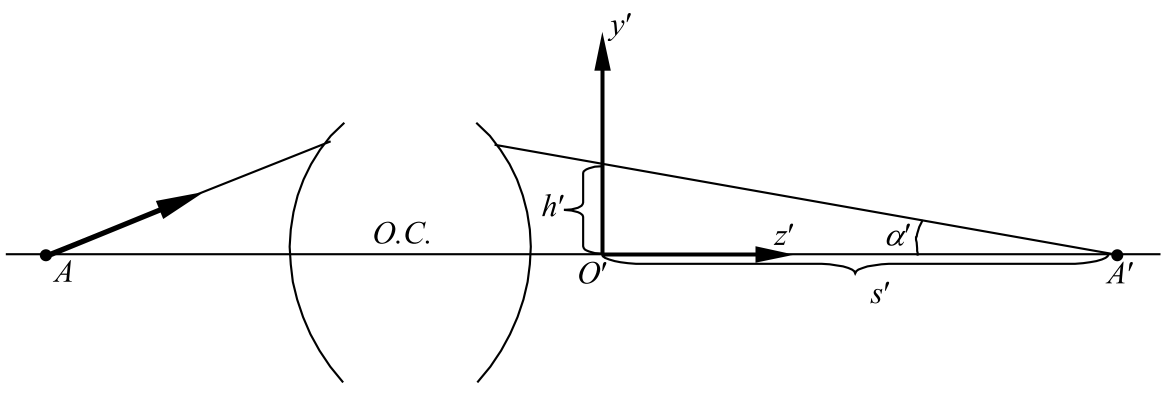

Рис. 2.

Определение матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_0$ в реальной системе может производиться расчетом хода четырех дифференциалов луча, т. е. лучей, бесконечно близких к данному [6]. Пусть $d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_4$ – четырехмерные векторы (1) этих лучей в пространстве предметов, а $d\mathbf{r}'_1, \ldots, d\mathbf{r}'_4$ – в пространстве изображений, полученные в результате расчета. Тогда из (4) получаем

$$\left(d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4\right) = \mathbf{G}\left(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4\right) \quad \text{или} \quad \mathbf{G} = \left(d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4\right)\left(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4\right)^{-1}$$

Удобнее всего выбрать входные координаты лучей так, чтобы матрица $(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4)$ была бы единичной, в этом случае $\mathbf{G} = (d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4)$. По известной матрице $\mathbf{G}$ для произвольного выбора систем координат собственная матрица $\mathbf{G}_0$ получается преобразованиями (6), (10), (14), приводящими системы координат к нужному виду и диагонализирующими подматрицы $\mathbf{G}_{ij}$.

В заключение рассмотрим гауссово изображение какой-либо точки на луче в пространстве предметов. Поместим начало системы координат в пространстве предметов в эту точку, тогда $\mathbf{h} = \mathbf{o}$, в пространстве изображений система координат может быть выбрана произвольно. Из (4) получаем

$$\begin{pmatrix}\mathbf{h}'\\ \boldsymbol{\alpha}'\end{pmatrix} = \mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbf{o}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{h}' = \mathbf{G}_{12}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{G}_{22}\boldsymbol{\alpha}$$

Исключая α, получим выражения, связывающие линейные и угловые дифференциалы луча в пространстве изображений

$$\mathbf{h}' = \mathbf{S}'\boldsymbol{\alpha}' \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\alpha}' = \mathbf{S}'^{-1}\,\mathbf{h}' \tag{31}$$

где $\mathbf{S}' = \mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}$ – симметрическая матрица второго порядка.

В обычной гауссовой оптике для параксиальной области центрированных систем h' и α' не векторы, а скаляры, они связаны соотношениями

$$h' = s'\,\alpha', \quad \alpha' = s'^{-1}\,h' \tag{32}$$

где s' – продольное расстояние от O' до гауссового изображения A' точки A (рис. 2), причем первым из соотношений (32) удобно пользоваться, если A' находится на «конечном расстоянии» от O', а вторым – «на бесконечности» (понимаемой в обобщенном смысле [7]). По аналогии с этим логично матрицу $\mathbf{S}'$ (или $\mathbf{S}'^{-1}$ для «бесконечно удаленного» изображения A') рассматривать как матрицу обобщенных продольных расстояний, определяющих положение «гауссового изображения» A' точки A в окрестности данного луча относительно начала o'. В общем случае это «изображение» A' не является стигматическим. Заметим, что из (7) следует, что, строго говоря, матрицей продольных расстояний должна считаться не $\mathbf{S}'$, а $\left(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{q}}\,\overline{\mathbf{q}}^T Z^{-2}\right)^{-1}\mathbf{S}'$, поскольку в случае стигматического изображения A' именно последняя матрица равна $s'\mathbf{I}$, где s' – расстояние вдоль луча от o' до A', но это строгое определение менее удобно.

Если ось z' направлена вдоль луча, то $\left(\mathbf{I} + \overline{\mathbf{q}}\,\overline{\mathbf{q}}^T Z^{-2}\right) = \mathbf{I}$, в этом случае собственные числа матрицы $\mathbf{S}'$ есть расстояния от o' до изображений A'_m, A'_s, точки A в двух взаимно перпендикулярных главных сечениях бесконечно узкого пучка, собственные векторы матрицы $\mathbf{S}'$ образуют ортогональную матрицу поворота на угол φ' между плоскостью $o'x'z'$ и одним из главных сечений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. О' Нейл. Введение в статистическую оптику. М. «Мир». 1966.
2. А. Джерард, Дж. М. Бёрч. Введение в матричную оптику. М. «Мир». 1978.
3. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. М. «Наука». 1970.
4. М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. М. ИЛ. 1962.
5. Дж. Форсайт, К. Молер. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М. «Мир». 1969.
6. Д. Ю. Гальперн. Тр. ГОИ. 26. 1959. 13.
7. С. А. Родионов. Тр. ЛИТМО. вып. 75. 1974. 13.