

# ОБ ИЗОПЛАНАТИЗМЕ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С.А. Родионов

Излагается общий подход к изопланатизму в оптических системах с позиций теории оптического изображения. Для произвольной оптической системы доказывается теорема, что при надлежащем выборе абберационной функции и обобщенных зрачковых координат производная абберационной функции по координате предмета есть дисторсия в преобразовании зрачковых координат. Рассмотрение основано на модели работы оптической системы, в которой вращение лучей при смещении точки предмета происходит вокруг точек пересечения их с поверхностью апертурной диафрагмы.

## Введение

Классическая теория изопланатизма [1-5] развита для осевой зоны центрированных оптических систем с изображением на конечном расстоянии, что ограничивает применение этого плодотворного понятия при проектировании современных сложных систем. Недавние попытки развить классическую теорию [6-9] показали необходимость и актуальность разработки теории изопланатизма в тесной связи с теорией аббераций и формирования оптического изображения. При этом для произвольных оптических систем возникают дополнительные трудности, связанные, во-первых, с непостоянством увеличения в различных направлениях (анаморфированием), что при несовпадении направления анаморфирования с осями координат приводит к необходимости рассмотрения вместо единого увеличения – матрицы увеличений [10], во-вторых, с неприменимостью понятия зрачков как изображений апертурной диафрагмы, поскольку эти изображения различны для различных лучей пучка, в-третьих, с необходимостью рассмотрения системы с изображением на бесконечно большом расстоянии.

В настоящей статье излагается общий подход к изопланатизму в оптических системах с позиций теории изображения, с учетом всех перечисленных факторов.

## Изопланатизм в общей теории изображения

В общей теории изображения [11, 12] строгий или глобальный изопланатизм любого изображающего прибора заключается в инвариантности к сдвигу изображающего оператора  $L$

$$I(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \xrightarrow{L} I'(\mathbf{x}' - \mathbf{a}') \text{ при любом } \mathbf{a},$$

где  $I(\mathbf{x})$  и  $I'(\mathbf{x}')$  – функции обобщенной интенсивности предмета и изображения,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  – двумерные векторы обобщенных координат на предмете и изображении,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  – векторы смещений предмета и изображения, связанные между собой через невырожденную матрицу  $2 \times 2$  обобщенных увеличений [10]:  $\mathbf{a}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{a}$ .

Изображающий оператор для линейных приборов, как известно, может быть выражен через функцию, описывающую изображение точечного объекта, – функцию рассеяния точки (ФРТ)  $h(\mathbf{x}, \mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x})$ , которая в случае строгого изопланатизма не зависит от  $\mathbf{x}$ .

Так как строгий глобальный изопланатизм соблюдается на практике крайне редко, работа прибора рассматривается в отдельных небольших изопланатических зонах [13], на которые разбивается поле зрения, при этом в пределах зоны можно пренебречь высшими степенями от  $\mathbf{x}$  (который теперь измеряется относительно центра зоны) и представить зональную ФРТ в виде суммы первых двух членов ряда Тейлора по  $\mathbf{x}$

$$h(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}') = h(0, \Delta\mathbf{x}') + \frac{\partial h(0, \Delta\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x},$$

где  $h(0, \Delta\mathbf{x}')$  – ФРТ в центре данной зоны,  $\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}$ . Условие изопланатизма заключается в равенстве нулю производной  $\partial h(0, \Delta\mathbf{x}') / \partial \mathbf{x}$  от ФРТ по смещению предмета, норма этой производной может служить мерой неизопланатизма, а задачей теории изопланатизма в оптических системах является оценка именно этой величины, т. е. по существу, рассмотренная ниже теория, как и все другие, имеет дело с зональным неизопланатизмом первого порядка.

### Изопланатизм в оптических системах – общий подход

ФРТ оптических систем полностью определяется аберрациями, а также формой, размерами и пропусканием зрачка [14]. Будем считать, что последние факторы остаются постоянными с точностью до величин второго порядка малости при смещении точки предмета, в этом случае неизопланатизм определяется изменением аберраций. Пусть  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  – некоторая функция, описывающая аберрации системы в пределах данной зоны,  $\mathbf{x}$  – вектор координат точки предмета, для которой определяются аберрации,  $\mathbf{y}$  – вектор некоторым образом определенных координат луча в пучке (на входном зрачке), назовем их обобщенными входными зрачковыми координатами. Таким образом, положение луча, входящего в систему, вполне определяется его координатами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , т. е. четырьмя параметрами. Представляя  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  в виде

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(0, \mathbf{y}) + \frac{\partial w(0, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x},$$

где  $w(0, \mathbf{y})$  – аберрационная функция в центре данной зоны, получим, что неизопланатизм оптических систем определяется производной  $\partial w(0, \mathbf{y}) / \partial \mathbf{x}$  аберрационной функции в центре зоны по смещению предмета. Зная эту производную, легко найти и производную ФРТ.

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{y}'$  выходных обобщенных зрачковых координат, аналогичный по смыслу вектору  $\mathbf{y}$ . Тогда можно сформулировать общую для любых оптических систем теорему, что при соответствующем

выборе абберрационной функции  $w$  и зрачковых координат  $y$  и  $y'$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial w(0, y)}{\partial x} = \mathbf{V}^T \mathbf{y}' - y, \quad (1)$$

где  $\mathbf{V}$  – матрица обобщенных зональных увеличений,  $T$  – индекс транспонирования. Иначе говоря, производная от абберрационной функции по координате предмета есть дисторсия в преобразовании зрачковых координат. Условие изопланатизма требует равенства (1) нулю.

### Модель работы оптической системы

Результаты теории оптического изображения и изопланатизма в конечном итоге определяются принятой моделью работы оптической системы, при этом для изопланатизма особенно существенно определить, что изменяется при смещении предмета. Напомним, что мы рассматриваем зональную модель, т. е. работу оптической системы в пределах сравнительно небольшой зоны предмета.

Мы не накладываем никаких ограничений на конструкцию и симметрию системы, которая может содержать и растровые, и голографические элементы, потребуем лишь, чтобы поверхность предметов и поверхность изображений не были бы сопряжены с поверхностью апертурной диафрагмы, т. е. существовало не более одного луча, соединяющего любые точки этих поверхностей.

Примем, что в системе отсутствует виньетирование и габариты пучка, идущего от данной точки предмета, целиком определяются одной апертурной диафрагмой. При наличии виньетирования, т.е. ограничения пучка несколькими диафрагмами, строго говоря, невозможно с самого начала говорить об изопланатизме, поскольку очевидно, что виньетирование приводит к линейной зависимости формы и размеров зрачка, а следовательно, и ФРТ от положения точки предмета. Однако изменение формы и размеров зрачка, как известно, в значительно меньшей степени влияет на ФРТ, чем изменение абберраций, поэтому, пренебрегая изменением зрачка, можно рассматривать и системы с виньетированием, вводя эквивалентную апертурную диафрагму, обеспечивающую такие же габариты пучка и такое же перемещение лучей при смещении предмета, как и все диафрагмы, участвующие в виньетировании.

В такой модели мы естественно получаем, что при смещении точки предмета лучи вращаются вокруг своих точек пересечения с поверхностью апертурной диафрагмы. Здесь возможна некоторая неопределенность, поскольку известен только контур диафрагмы. Примем за поверхность диафрагмы ту поверхность, по которой скользит контур диафрагмы при изменении ее размеров. Если в апертурной диафрагме помещен фильтр со сложной пространственной структурой, то за поверхность диафрагмы принимается поверхность этого фильтра.

## Обобщенные координаты на предмете и изображении

Существенной частью принятой модели являются определения векторов обобщенных координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  на предмете и изображении. Естественно, что эти определения будут различными для близкого и удаленного предмета и изображения (будем рассматривать эти понятия и в смысле, указанном в работе [15]).

В первом случае – близкого предмета или изображения (на «конечном расстоянии») – обобщенные координаты линейны. Поместим начала систем координат  $oxuz$  и  $o'x'u'z'$  в центры зон  $A_0$  и  $A'_0$  предмета и изображения таким образом, чтобы плоскости  $oxy$  и  $o'x'u'$  касались поверхностей предмета и изображения (рис. 1, а). Тогда векторы обобщенных координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  есть двумерные векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  проекций трехмерных радиус-векторов  $\vec{\mathbf{a}}$  и  $\vec{\mathbf{a}}'^1$  точек  $A$  и  $A'$  на координатные плоскости  $oxy$  и  $o'x'u'$  соответственно

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a}'. \quad (2)$$

Удаленный предмет или изображение характеризуются тем, что их координаты рассматриваются как угловые, что приводит к необходимости ввести некоторые полюсы  $O$  и  $O'$  (центры зрачков), из которых производится оценка угловых величин. Поместим в полюсы начала систем координат, направив оси  $z, z'$  так, чтобы они проходили через центры зон  $A_0$  и  $A'_0$  (рис.1,б). Предположим, что участки поверхностей предмета и изображения в пределах данной зоны близки к сферам, концентричным  $O$  и  $O'$ ,  $r_p$  и  $r'_p$  – радиусы этих сфер. Для предмета или изображения, находящихся строго на бесконечности, эти радиусы бесконечно велики, но мы не ограничиваемся таким случаем, наше определение удаленного предмета или изображения допускает любые величины  $r_p$  или  $r'_p$ , так как в соответствии с [15] это определение означает лишь, что координаты предмета или изображения рассматриваются как угловые.

Итак, определим векторы обобщенных координат  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$  (угловых для данного случая) как деленные на  $-r_p$  и  $-r'_p$  векторы проекций точек  $A$  и  $A'$  на координатные плоскости  $oxy$  и  $o'x'u'$  соответственно

$$\mathbf{x} = -r_p^{-1}\mathbf{a} = -\rho_p\mathbf{a}; \quad \mathbf{x}' = -r'_p{}^{-1}\mathbf{a}' = -\rho'_p\mathbf{a}', \quad (3)$$

$$\text{где } \rho_p = r_p{}^{-1}; \quad \rho'_p = r'_p{}^{-1}$$

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем, чтобы отличать двумерные векторы от трехмерных будем последние везде, где они встречаются, отмечать стрелкой сверху.

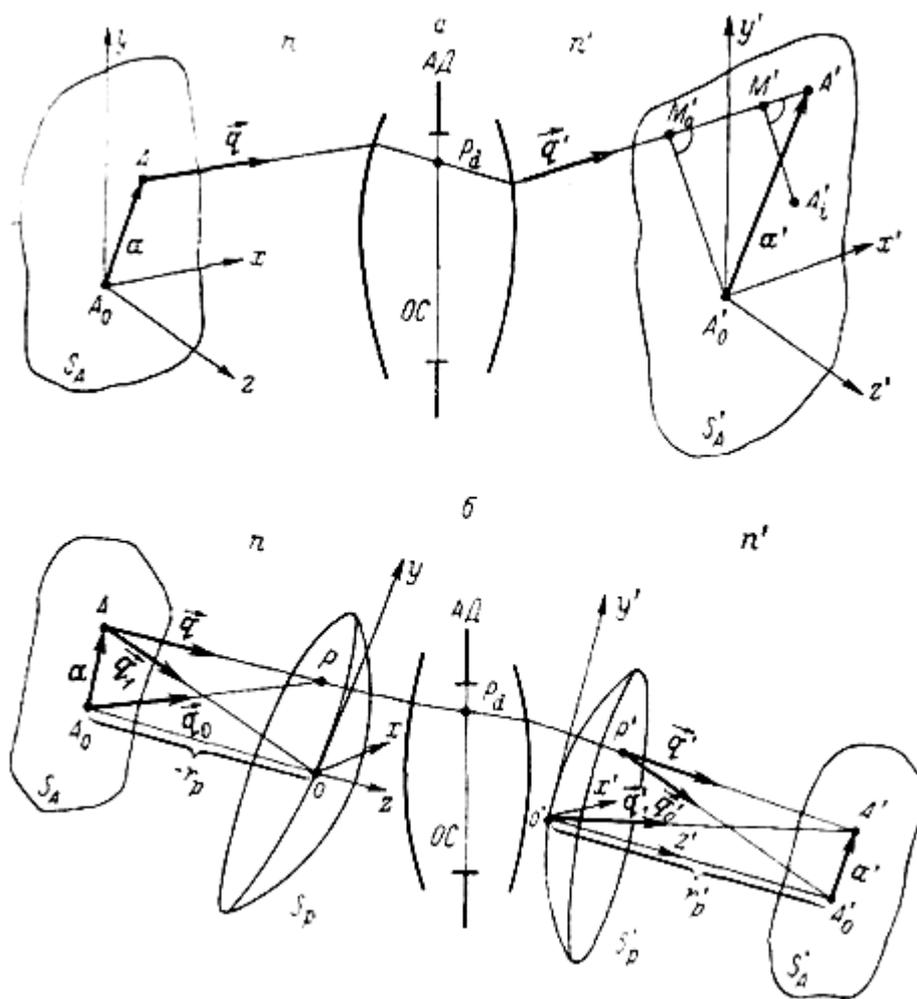


Рис. 1. Обобщенные координаты на предмете и изображении. а) – для случая близких предмета и изображения, б) – для удаленных предмета и изображения.

$S_A$  и  $S'_A$  – поверхности предмета и изображения,  $A_0$  и  $A'_0$  – центры зон предмета, и изображения,  $A$  – произвольная точка предмета,  $A'$  – точка пересечения с поверхностью изображения луча, выходящего из точки  $A$ ,  $A'_i$  – точка идеального (безабберационного) изображения точки  $A$ ,  $AD$  – апертурная диафрагма,  $S_p$  и  $S'_p$  – входная и выходная сферы сравнения.

Проведем через полюсы  $o$  и  $o'$  сферы  $S_p$  и  $S'_p$  с центрами в точках  $A_0$  и  $A'_0$ , радиусы этих сфер  $r_p$  и  $r'_p$ . Рассмотрим некоторый реальный луч, выходящий из точки  $A$  предмета, пересекающий сферы  $S_p$  и  $S'_p$  и поверхность изображения в точках  $P$ ,  $P'$  и  $A'$  соответственно (рис.1,б). Обозначим орт этого луча в пространстве предметов  $\vec{q}$ , а изображений  $\vec{q}'$ . Рассмотрим также вспомогательные лучи  $\vec{q}_0$  и  $\vec{q}_1$  в пространстве предметов и  $\vec{q}'_0$ ,  $\vec{q}'_1$  в пространстве изображений, проведенные, как показано на рис.1,б. Нетрудно увидеть, что обобщенные координаты точек  $A$  и  $A'$  пересечения луча  $\vec{q}\vec{q}'$  с

поверхностями предмета и изображения, определенные формулами (3), могут быть также выражены<sup>2</sup>

$$\mathbf{x} = -\mathbf{q}_1 \cong -(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) = -\Delta\mathbf{q}; \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{q}'_1 \cong -(\mathbf{q}' - \mathbf{q}'_0) = -\Delta\mathbf{q}', \quad (4)$$

где  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{q}_1$  и т. д. – двумерные векторы проекций соответствующих ортов на координатные плоскости  $oxu$  и  $o'x'u'$ , причем

$$\mathbf{q}_0 = -\rho_\rho \mathbf{p}; \quad \mathbf{q}'_0 = -\rho'_\rho \mathbf{p}', \quad (5)$$

где  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  векторы проекций точек  $P$  и  $P'$  на эти плоскости.

В заключение определим вектор обобщенных поперечных аберраций  $\Delta\mathbf{x}'$  какого-либо луча как разность

$$\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x} \quad (6)$$

где  $\mathbf{V}$  – матрица обобщенных увеличений.

### Аберрационная функция и теорема изопланатизма

Аберрационная функция должна быть функцией координат луча и должна характеризовать отклонение луча от идеального положения. Применяемые аберрационные функции – либо волновая аберрация, либо эйконалы [1,5,15,14] – не годятся для нашей цели, так как в них не учитывается положение апертурной диафрагмы. Построим нашу аберрационную функцию, например, на базе эйконала, с добавочным членом  $\omega$ , учитывающим апертурную диафрагму:  $w = E + \omega$ .

Для близкого изображения в качестве  $E$  естественно выбрать смешанный эйконал  $E_3(\mathbf{x}, \mathbf{q}')$  – оптическую длину луча от точки предмета  $A$  до основания  $M'_i$  перпендикуляра, опущенного на луч  $\mathbf{q}'$  из точки  $A'_i$  идеального изображения с обобщенной координатой  $\mathbf{V}\mathbf{x}$ , или, что то же самое, эйконал  $E_{30}$  от точки предмета до основания  $M'_0$  перпендикуляра, опущенного на луч из центра зоны  $A'_0$  плюс член  $n'(\mathbf{V}\mathbf{x})^T \mathbf{q}'$  [здесь использована матричная запись скалярного произведения  $(\mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{q}')$  векторов  $\mathbf{V}\mathbf{x}$  и  $\mathbf{q}'$ ,  $n'$  – показатель преломления в пространстве изображений].

Найдем полный дифференциал эйконала  $E_3$

$$dE_3 = dE_{30} + d[n'(\mathbf{V}\mathbf{x})^T \mathbf{q}'] = dE_{30} + n'd\mathbf{x}^T \mathbf{V}^T \mathbf{q}' + n'd\mathbf{q}'^T \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (7)$$

но  $dE_{30}$ , как известно [16], равен  $-nd\bar{\mathbf{a}}^T \mathbf{q} - n'd\mathbf{q}'^T \bar{\mathbf{a}}'$ , где  $n$  – показатель преломления в пространстве предметов. Так как  $d\bar{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} d\mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ , а для близкого

изображения  $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$ , то  $dE_{30} = -nda^T \mathbf{q} - n'd\mathbf{q}'^T \mathbf{x}'$ . Объединяя с (7), получим

<sup>2</sup> Более точное выражение, как можно показать, имеет вид  $\mathbf{x} = -(I + \mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0^T) \Delta\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}' = -(I + \mathbf{q}'_0 \mathbf{q}'_0^T) \Delta\mathbf{q}'$ , где  $I$  – единичная матрица  $2 \times 2$ . При  $\rho_\rho, \rho'_\rho \rightarrow 0$  в соответствии с (5) член  $\mathbf{q}_0 \mathbf{q}_0^T$  и  $\mathbf{q}'_0 \mathbf{q}'_0^T \rightarrow 0$ , а в практических случаях не превышает по норме 0.01, т. е. относительная погрешность (4) не более 1%.

$$dE_3 = -nda^T \mathbf{q} - n'd\mathbf{q}'^T (\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}) + n'd\mathbf{x}'^T \mathbf{V}^T \mathbf{q}'. \quad (8)$$

Для удаленного изображения вектор  $\mathbf{q}'$  не определяет единственного луча, и поэтому в качестве  $E$  выбираем координатный эйконал  $E_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}')$ , равный оптической длине луча от точки предмета до точки  $P'_i$  выходной сферы с центром в точке  $A'_i$  идеального изображения или, что то же самое, до выходной сферы  $S'_p$  с центром в точке  $A'_0$  плюс член  $n'(\mathbf{V}\mathbf{x})^T \mathbf{p}'$ .

Полный дифференциал этого эйконала равен

$$dE_1 = dE_{10} + n'd\mathbf{x}'^T \mathbf{V}^T \mathbf{p}' + n'd\mathbf{p}'^T \mathbf{V}^T \mathbf{x}. \quad (9)$$

В соответствии с [16] дифференциал точечного эйконала между любыми двумя точками равен

$$dE_{10} = -n\bar{d}\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{q}} + n'd\bar{\mathbf{p}}' \bar{\mathbf{q}}'.$$

где  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\mathbf{p}}'$  – радиус-векторы (трехмерные) начальной и конечной точек,  $\bar{\mathbf{q}}$  и  $\bar{\mathbf{q}}'$  – трехмерные орты луча. Но  $d\bar{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} d\mathbf{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ , поэтому  $n\bar{d}\bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{q}} = nd\mathbf{a}^T \mathbf{q}$ , где  $d\mathbf{a}$  и  $\mathbf{q}$  – двумерные. Далее,  $d\bar{\mathbf{p}}'^T \bar{\mathbf{q}} = d\bar{\mathbf{p}}'^T (\bar{\mathbf{q}}'_0 + \Delta\bar{\mathbf{q}}') = d\bar{\mathbf{p}}'^T \Delta\bar{\mathbf{q}}'$ , так как  $d\bar{\mathbf{p}}'^T \bar{\mathbf{q}}'_0 = 0$  в силу ортогональности  $\bar{\mathbf{q}}'_0$  и  $d\bar{\mathbf{p}}'$ , поскольку  $\bar{\mathbf{q}}'_0$  – нормаль сферы  $S'_p$ , а точка  $P'$  лежит на сфере. Выразим трехмерные векторы через двумерные в виде

$$d\bar{\mathbf{p}}' = \begin{pmatrix} d\mathbf{p}' \\ dz' \end{pmatrix}; \quad \Delta\bar{\mathbf{q}}' = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{q}' \\ \Delta Z \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{q}}'_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}'_0 \\ Z'_0 \end{pmatrix}, \quad \text{тогда}$$

$$d\bar{\mathbf{p}}'^T \Delta\bar{\mathbf{q}}' = d\mathbf{p}'^T \Delta\mathbf{q}' + dz' \Delta Z'. \quad (10)$$

Но  $\bar{\mathbf{p}}'$  есть радиус-вектор точки на сфере и удовлетворяет уравнению сферы  $2z' - \rho'_\rho (\mathbf{p}'^T \mathbf{p}' + z'^2) = 0$  или  $dz' = (\rho'_\rho d\mathbf{p}'^T \mathbf{p}') / (1 - \rho'_\rho z')$ . С другой стороны, при малом  $\Delta\mathbf{q}' \bar{\mathbf{q}}_0^T \Delta\bar{\mathbf{q}}' = 0$ , откуда  $\Delta Z = -\mathbf{q}'_0^T \Delta\mathbf{q}' / Z'_0$ .

Легко увидеть, что  $1 - \rho'_\rho z' = Z'_0 = \sqrt{1 - \mathbf{q}'_0^T \mathbf{q}'_0}$ , тогда с учетом (10)

$$d\bar{\mathbf{p}}'^T \Delta\bar{\mathbf{q}}' = d\mathbf{p}'^T \Delta\mathbf{q}' + \frac{d\mathbf{p}'^T \mathbf{q}'_0 \mathbf{q}'_0^T \Delta\mathbf{q}'}{1 - \mathbf{q}'_0^T \mathbf{q}'_0} = d\mathbf{p}'^T (I + \mathbf{q}'_0 \mathbf{q}'_0^T) \Delta\mathbf{q}'$$

(если пренебречь высшими степенями  $\mathbf{q}'_0^T \mathbf{q}'_0$ ), что в соответствии со сноской <sup>2</sup> равно  $d\mathbf{p}'^T \Delta\mathbf{x}'$ . Объединяя все результаты, получим окончательно для полного дифференциала  $dE_1$

$$dE_1 = -nda^T \mathbf{q} - n'd\mathbf{p}'^T (\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}) + n'd\mathbf{x}'^T \mathbf{V}^T \mathbf{p}'. \quad (11)$$

Вводя обобщенные координаты предмета в соответствии с (2), (3), (4), (5) в выражения (8) и (11), можно получить одно обобщенное выражение, объединяющее их, если определить векторы входных зрачковых координат луча  $\mathbf{u}$  и выходных обобщенных координат луча  $\mathbf{y}'_1$  следующим образом:

$$y = n \begin{cases} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{cases}; y'_1 = n' \begin{cases} \mathbf{q}' & \text{для близкого предмета (или изображения)} \\ \mathbf{p}' & \text{для удаленного предмета (или изображения)} \end{cases} \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8) и (11), после некоторых преобразований получим

$$dE = d\mathbf{x}^T (\mathbf{V}^T y'_1 - y) - dy'_1{}^T (\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}) \quad (13)$$

и в соответствии с определением абберационной функции

$$dw = d\mathbf{x}^T (\mathbf{V}^T y'_1 - y) - dy'_1{}^T (\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}) + d\omega. \quad (14)$$

$y'_1$  здесь не может служить вектором выходных лучевых координат, так как, во-первых, зависит от  $\mathbf{x}$ , а, во-вторых, в общем случае не однозначно определяет луч, например, если размеры выходного зрачка и кружка рассеяния поперечных аббераций одного порядка. Для получения независимых лучевых координат и доказательства теоремы (1) рассмотрим частный дифференциал  $dw_x$  абберационной функции при смещении точки предмета на  $d\mathbf{x}$ . Он легко может быть получен из предыдущего выражения, если найти частный дифференциал  $dy'_{1x}$  изменения выходных координат луча при смещении предмета. Этот дифференциал зависит от выбора точки вращения луча при смещении предмета и в соответствии с нашей моделью определяется структурой в пространстве изображения бесконечно узкого пучка, выходящего из точки  $P_d$  пересечения луча с поверхностью апертурной диафрагмы. Свойства такого пучка полностью определяются симметрической матрицей  $2 \times 2$ .

Введем эту матрицу  $\mathbf{T}'$  следующим образом:

$$\mathbf{T}' = \frac{\partial y'_1}{\partial \mathbf{x}'} \text{ или } \begin{cases} d\mathbf{q}' = \frac{1}{n'} \mathbf{T}' d\mathbf{x}' & \text{для близкого изображения,} \\ d\mathbf{p}' = \frac{1}{n'} \mathbf{T}' d\mathbf{x}' & \text{для удаленного изображения.} \end{cases} \quad (15)$$

Для удаленного изображения элементы матрицы  $\mathbf{T}'$  имеют размерность единиц длины, а для близкого изображения – обратную. Для конкретных систем матрица  $\mathbf{T}'$  может быть получена расчетом двух бесконечно близких к данному, некопланарных с ним лучей (дифференциалов лучей), исходящих из точки  $P_d$ . Пусть для этих лучей получены значения дифференциалов поперечных аббераций и выходных координат  $dx'_1, dx'_2, dy'_{11}, dy'_{12}$ . Тогда

$$\mathbf{T}' = (dx'_1 dx'_2)^{-1} (dy'_{11} dy'_{12}).$$

Подставим (15) в (14), выразив  $d\mathbf{x}'$  с учетом (6) в виде  $d\mathbf{x}' = d(\Delta\mathbf{x}') + \mathbf{V}d\mathbf{x}$ .

После элементарных преобразований получим

$$dw_x = d\mathbf{x}^T [\mathbf{V}^T (y'_1 - \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}') - y] + d\omega - d(\Delta\mathbf{x}')^T \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}'. \quad (16)$$

Заметим, что последний член в этом выражении есть дифференциал квадратичной формы  $\Delta\mathbf{x}'^T \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}'/2$ .

Из (16) естественно вытекает определение вектора  $\mathbf{y}'$  обобщенных выходных зрачковых координат, независимых от смещения предмета,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{y}'_1 - \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}' = \begin{cases} n'\mathbf{q}' - \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}' & \text{для близкого изображения,} \\ n'\mathbf{p}' - \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}' & \text{для удаленного изображения,} \end{cases} \quad (17)$$

и равенство  $w = \Delta\mathbf{x}'^T \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}' / 2$ , т. е. определение абберационной функции в виде

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}') = E + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{x}'^T \mathbf{T}'\Delta\mathbf{x}'. \quad (18)$$

Окончательно получим при указанных определениях

$$dw_x = d\mathbf{x}^T (\mathbf{V}^T \mathbf{y}' - \mathbf{y}) \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{V}^T \mathbf{y}' - \mathbf{y}. \quad (19)$$

### Обсуждение результатов

Основными результатами рассмотренной теории являются обобщенные зрачковые координаты  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{y}'$  и абберационная функция  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$ , описывающие свойства оптической системы в принятой модели с апертурной диафрагмой и удовлетворяющие теореме изопланатизма (19). Этим важным понятиям, определенным выражениями (12), (17) и (18), можно придать простой геометрический смысл. Рассмотрим луч  $AP_dA'$  и будем вращать вторую «половинку» этого луча, идущую от точки  $P_d$  апертурной диафрагмы до точки  $A'$  изображения, вокруг точки  $P_d$  до совмещения с точкой  $A'$  идеального изображения (рис.2).

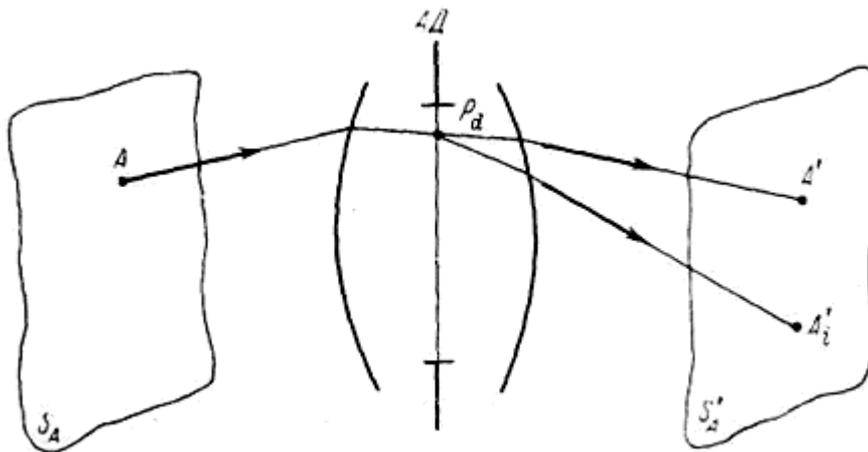


Рис. 2. К геометрической интерпретации абберационной функции и зрачковых координат.  $AP_dA'$  – реальный луч,  $AP_dA_i'$  – ломаный луч.

После этого мы получаем ломаный луч  $AP_dA_i'$ , выходящий из точки  $A$  предмета и приходящий в точку идеального изображения. В общем случае этот луч терпит излом в точке  $P_d$  его пересечения с апертурной диафрагмой и поэтому не является в целом реальным лучом, однако каждая из его «половинок»  $AP_d$  и  $P_dA_i'$  есть отрезок реального луча. Выходная координата

$y'_{1i}$  этого луча в соответствии с (15) с точностью до  $(\Delta x')^2$  есть  $y'_1 - \mathbf{T}'\Delta x'$ , т. е. совпадает с выходной зрачковой координатой (17).

Оптическая длина этого луча до точки  $A'_i$  в случае близкого изображения или до точки  $P'_i$  для удаленного изображения может быть выражена в виде трех членов ряда Тейлора эйконала  $E$

$$E(A'_i) = E(A') - \frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}'} \Delta \mathbf{x}' + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}'^T \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}'^2} \Delta \mathbf{x}' . \quad (20)$$

Для получения вектора первых производных  $\partial E / \partial \mathbf{x}$  и матрицы вторых производных  $\partial^2 E / \partial \mathbf{x}^2$  воспользуемся формулой (13), в которую подставим  $dy'_1$  из (15). В результате получим для частного дифференциала  $E$  по  $\mathbf{x}'$

$$dE_{\mathbf{x}'} = -d\mathbf{x}'^T \mathbf{T}'(\mathbf{x}' - V\mathbf{x}) ,$$

откуда

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}'} = -\mathbf{T}'(\mathbf{x}' - V\mathbf{x}) = -\mathbf{T}'\Delta \mathbf{x}' \text{ и } \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}'^2} = -\mathbf{T}' .$$

Подставляя полученные выражения в (20), увидим, что оптическая длина ломаного луча  $AP_d A'_i$  и есть с точностью до  $(\Delta x')^3$  наша абберационная функция (18).

Итак, мы получили, что общая теория изопланатизма, основанная на ограничении пучков апертурной диафрагмой, приводит к необходимости описания аббераций оптических систем функцией, представляющей собой оптическую длину луча, выходящего из точки предмета, терпящего в общем случае излом в точке пересечения его с апертурной диафрагмой и попадающего в точку идеального изображения. Аргументами функции являются обобщенные координаты этого луча – угловые (направляющие косинусы орта луча с осями  $x$  и  $y$ ) для близкого предмета или изображения и линейные (координаты точки пересечения луча со сферами  $S_p$  или  $S'_p$ ) для удаленного.

## Литература

1. А.И. Тудоровский. Теория оптических приборов. АН СССР, М.– Л., 1946.
2. М. Берек. Основы практической оптики. ГТТИ, 1933.
3. A.E. Conrady. Applied optics and optical design. Part I, Oxford Univ. Press. London, 1929.
4. Н.Н. Hopkins. Proc. Phys. Soc, 38, 92, 1948.
5. Г.Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. «Машиностроение», Л., 1968.
6. W.T. Welford. Opt. Comm., 3, 1, 1971.
7. W.T. Welford. Progress in optics, 267. Amsterdam, vol. XXII, 1976.
8. E. Dietzch. Feingeratetechnik, 22, 160, 1973.
9. E. Dietzch. Feingeratetechnik, 24, 439, 1975.
10. С.А. Родионов. Изв. вузов, приборостроение, 20, № 10, 117, 1977.
11. А. Паиулис. Теория систем и преобразований в оптике. «Мир», М., 1971.
12. С.А. Родионов. Тр. ЛИТМО, вып. 75, 36, 1974.
13. С.А. Родионов. Опт. и спектр., 32, 178, 1972.

14. А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. «Мир», М., 1964.
15. С.А. Родионов. Тр. ЛИТМО, вып. 75, 46, 1974.
16. М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. ИЛ., М., 1962.