

# О ДИФРАКЦИИ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

С. А. Родионов

Рассматривается дифракционная теория формирования изображения в оптических системах, основанная на понятии единственной апертурной диафрагмы, причем, в отличие от существующих моделей, учитывается не только ограничение размеров пучка, но и положение в системе ограничивающей апертурной диафрагмы. В предложенной модели влияние оптической системы описывается теми же понятиями — абберационной функцией в обобщенных зрачковых координатах, которые были введены автором ранее из чисто геометрических соображений, при рассмотрении теории изопланатизма.

## 1. Введение

Дифракционная теория формирования изображения в оптических системах приобретает главенствующее значение в современной технической оптике в связи с необходимостью анализа тонкой структуры изображения и возможностями, представляемыми вычислительной техникой для такого анализа на стадии проектирования оптической системы.

Основой дифракционной теории является описание распространения электромагнитного поля от предмета к изображению через оптическую систему. Очевидно, что наиболее строгая теория должна учитывать действие всех диафрагм, в том числе и оправ линз и рассматривать распространение поля как ряд последовательных дифракции на каждой поверхности и диафрагме. Очевидно, также, что построение такой теории не только затруднительно, но и мало полезно, поскольку на фоне неизбежной сложности полученной математической модели потеряются те общие закономерности, ради которых развивается теория.

Существующие математические модели формирования оптического изображения учитывают дифракцию только как ограничение размеров проходящего через систему фронта волны, не связывая это ограничение с реальным положением в системе ограничивающей (апертурной) диафрагмы, т. е. рассмотрение дифракции переносится в пространство предметов или изображений [1-5]. Такой подход позволяет получить достаточно простую модель, но содержит неопределенность в выборе поверхности интегрирования в дифракционном интеграле. Логичнее всего было бы принять за эту поверхность изображение апертурной диафрагмы, но, поскольку в общем случае это изображение не может быть определено однозначно, возникает возможность произвола, и поверхность интегрирования выбирается из соображений удобства, обычно в виде сферы, помещаемой либо в бесконечность [5, 6], либо в зрачок [3, 4] (положение которого в общем случае также не определяется однозначно). Отмеченная неопределенность допускает существование множества неадекватных моделей формирования оптического изображения и приводит к невозможности однозначного определения основной характеристики оптической системы в этих моделях – волновой аберрации.

В настоящей работе предлагается модель формирования оптического изображения, не более сложная чем существующие, но более близкая к реальным процессам, происходящим в оптической системе. Модель основана на предположении, что в системе для данной зоны предмета отсутствует виньетирование, т. е. пучок лучей, исходящий из любой точки зоны предмета ограничивается одной апертурной диафрагмой, на которой и происходит дифракция, а размеры всех других диафрагм настолько больше размеров проходящего через них пучка, что влиянием дифракции на этих диафрагмах можно пренебречь.

Процесс распространения поля через оптическую систему разбивается на три этапа: распространение дифрагированного поля от предмета до апертурной диафрагмы, прохождение поля через диафрагму и распространение дифрагированного поля от диафрагмы до поверхности изображения.

## 2. Принцип Гюйгенса-Френеля в неоднородной среде

Существующая теория дифракции в оптических системах основывается на различных формулировках принципа Гюйгенса-Френеля, описывающего распространение дифрагированного поля в среде с постоянным показателем преломления, в то время как необходимо выражение для распространения поля между двумя поверхностями, разделенными оптической системой. Получим выражение конструктивным путем из принципа Гюйгенса-Френеля.

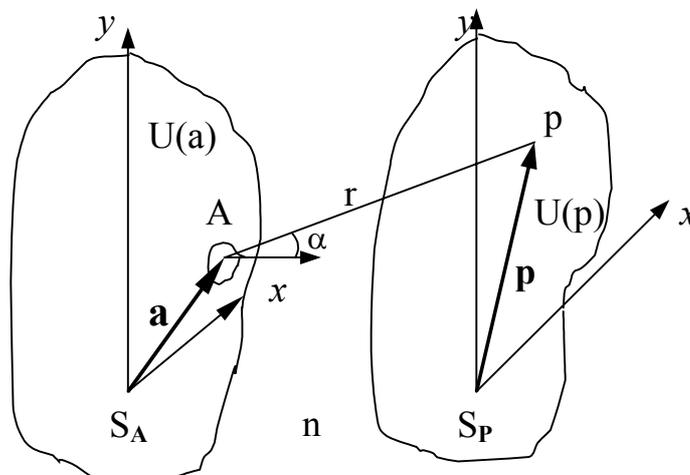


Рис. 1. К принципу Гюйгенса-Френеля в однородной среде;  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{p}$  – радиус-векторы точек  $A$  и  $P$ ,  $N$  – нормаль к поверхности  $S_a$ .

Пусть на поверхности  $S_a$  имеется поле  $U(\mathbf{a})$ , где  $\mathbf{a}$  – двумерный радиус-вектор точки  $A$  на этой поверхности<sup>1</sup> (см. рис. 1). Тогда поле  $U(\mathbf{p})$  на поверхности  $S_p$ , в соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля в формулировке Релея-Зоммерфельда [7] или Луненбурга [5] выражается дифракционным интегралом (при  $r \gg \lambda$ )

<sup>1</sup> Мы ограничиваемся, как и большинство авторов, скалярной теорией поля, при этом  $U$  – комплексная амплитуда поля.

$$U(\mathbf{p}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_a} U(\mathbf{a}) \exp(-iknr) r^{-1} \cos \alpha d\mathbf{a} \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $n$  – показатель преломления среды,  $d\mathbf{a}$  – дифференциал площадки поверхности  $S_a$ .

Пусть теперь поверхности  $S_a$  и  $S_p$  разделены оптической системой, то есть рядом оптических поверхностей  $S_1, \dots, S_m$ , между которыми среды имеют показатели преломления  $n_1, \dots, n_{m-1}, n_p$  (рис. 2). Мы будем предполагать, что эти поверхности достаточно гладкие (по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ), а показатели преломления либо постоянны, либо меняются достаточно плавно. В этом случае дифракцией на поверхностях  $S_1, \dots, S_m$ , и на неоднородностях показателя преломления можно пренебречь.

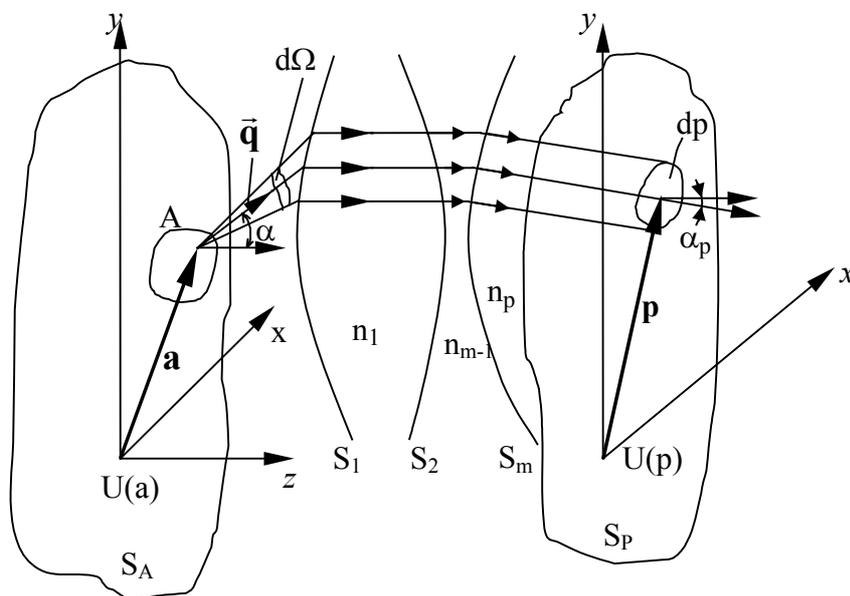


Рис. 2. К принципу Гюйгенса-Френеля в неоднородной среде.

$\vec{q}$  – орт луча, соединяющего точки  $A$  и  $P$ ,  $\alpha$  и  $\alpha_p$  – углы между этим лучом и нормальями к поверхностям  $S_a$  и  $S_p$ .

Предположим также, что поверхности  $S_a$  и  $S_p$  не сопряжены оптически в широком смысле, т. е. существует не более одного луча, соединяющего любую пару точек из окрестностей этих поверхностей, достаточно протяженных по сравнению с длиной волны  $\lambda$ . Это условие эквивалентно условию  $r \gg \lambda$  в интеграле (1.1). Сравнивая рис.1 и 2, легко увидеть, что расстояние  $r$  между точками  $A$  и  $P$  на рис. 1, входящее в показатель  $\exp$  в (1.1), на рис. 2 заменяется на оптическую длину луча между этими точками  $E(a, p)$  – точечную гамильтонову характеристику или координатный эйконал [3, 8], а величина  $r^{-1}$  заменяется на  $(d\Omega n^2 / d\mathbf{p} \cos \alpha_p)^{1/2}$ , где  $d\Omega$  – элементарный телесный угол лучевой трубки, выходящей из точки  $A$ ,  $d\mathbf{p}$  – элементарная площадка, вырезаемая этой трубкой на поверхности  $S_p$ . Кроме того, мы должны учесть

возможные потери при прохождении луча через систему, введя неотрицательный коэффициент энергетического пропускания  $\tau(\mathbf{a}, \mathbf{p})$  вдоль луча. В результате получаем выражение для дифракции через оптическую систему

$$U(\mathbf{p}) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_a} U(\mathbf{a}) f(\mathbf{a}, \mathbf{p}) K(\mathbf{a}, \mathbf{p}) d\mathbf{a} \quad (1.2)$$

где  $f(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \tau^{1/2}(\mathbf{a}, \mathbf{p}) \exp[-ikE(\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{p})]$  – функция комплексного пропускания [3, 9] оптической системы вдоль луча, соединяющего точки  $A$  и  $P$ ,  $K(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = (n^2 d\Omega / d\mathbf{p} \cos \alpha_p)^{1/2} \cos \alpha$ ;  $\cos \alpha = q_z$ , где  $q_z$  проекция на ось  $z$  нормальную к поверхности  $S_a$ , орта луча  $\bar{\mathbf{q}}$ .

### 3. Построение модели формирования изображения в оптических системах

Рассмотрим первую стадию – распространение поля от предмета до апертурной диафрагмы, пользуясь выражением (1.2).

На рис. 3  $U(\mathbf{a})$  – поле на поверхности предмета  $S_a$ . В соответствии с (1.2) поле на поверхности  $S_{p_d}$  апертурной диафрагмы определяется

$$U(\mathbf{p}_d) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_a} U(\mathbf{a}) r^{1/2}(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d) \exp[-ikE(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d)] K(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d) d\mathbf{a} \quad (2.1)$$

Выразим эйконал  $E(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d)$  для луча  $AP_d$  через эйконал  $E(0, \mathbf{p}_d)$  луча  $AP_d$ , выходящего из центра зоны  $A_0$ . При небольших размерах зоны  $E(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d)$  достаточно точно представляется тремя членами ряда Тейлора по  $\mathbf{a}$

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d) = E(0, \mathbf{p}_d) + \mathbf{a}^T \frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}^2} \mathbf{a} \quad (2.2)$$

Где  $\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}}$  – вектор производной (градиент) функции  $E$  по  $\mathbf{a}$ ,  $\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}^2}$  – матрица вторых производных,  $T$  – индекс транспонирования.

Как известно [3, 8], дифференциал координатного эйконала  $E(\mathbf{a}, p_d)$  при изменении  $\mathbf{a}$  равен  $dE = -n d\mathbf{a}^T \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{q}$  – проекция орта луча  $\bar{\mathbf{q}}$  на координатную плоскость  $xoy$ . При  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ , т.е. соответствует лучу, выходящему из центра зоны. Отсюда

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}} = -n \mathbf{q}_0; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}^2} = -n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}} \quad (2.3)$$

Введем обобщенные координаты на предмете  $\mathbf{x}$  и обобщенные входные лучевые координаты  $\mathbf{u}$  так же, как в работе [10] автора.

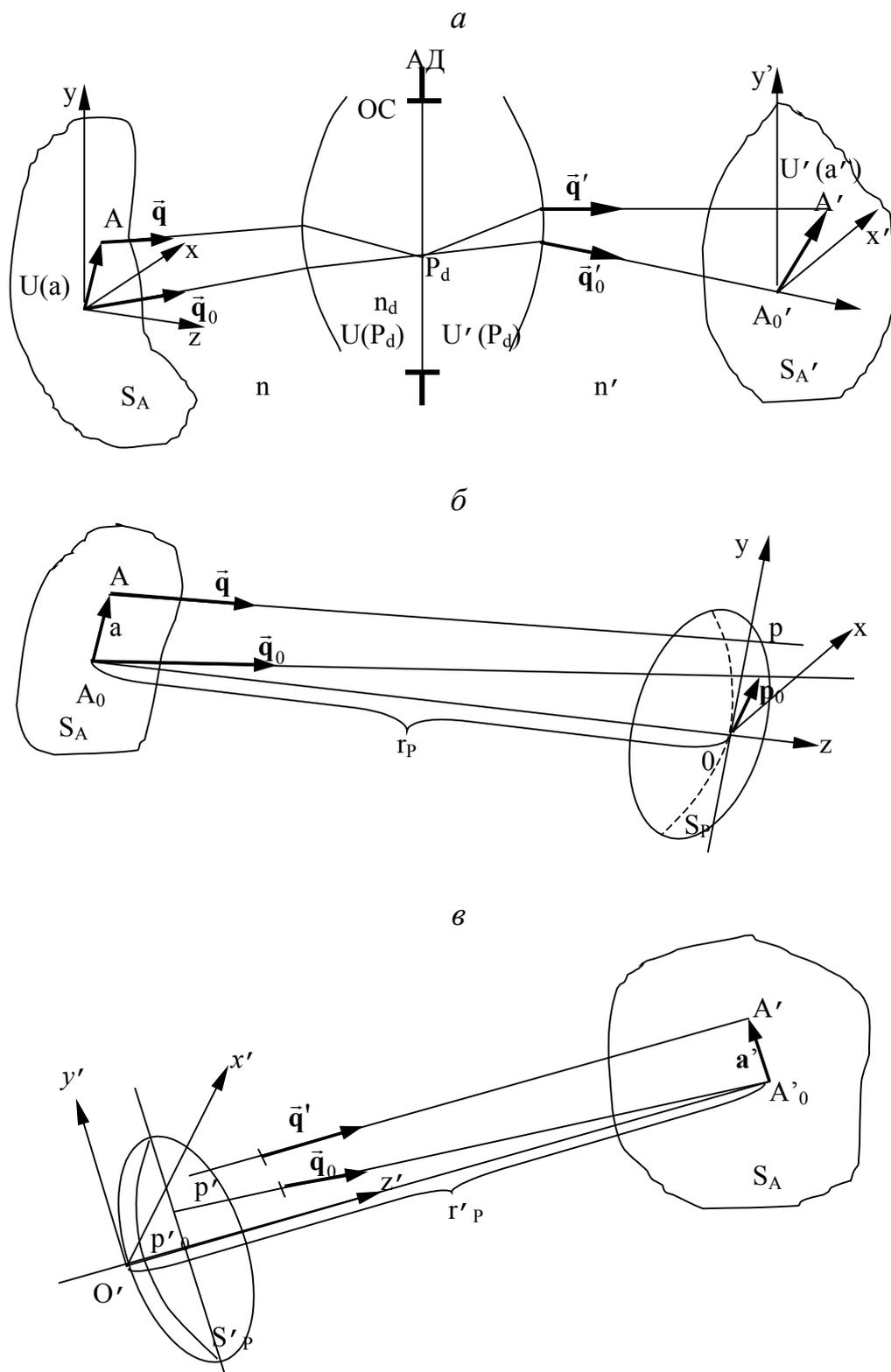


Рис. 3. К прохождению поля через оптическую систему.

*a* – общая схема и координаты для близких предмета и изображения, б, в – координаты для удаленных предмета и изображения. ОС – оптическая система, АД – апертурная диафрагма,  $S_a$  и  $S'_a$  – поверхности предмета и изображения,  $A_0$  и  $A'_0$  – центры зон на этих поверхностях,  $A$  и  $A'$  – произвольные точки в пределах этих зон,  $S_p$  и  $S'_p$  – входная и выходная сферы. Для близких предмета и изображения начала координат  $O$  и  $O'$  помещены центры зон, оси  $z$  и  $z'$  – по нормальям к поверхностям  $S_a$  и  $S'_a$ . Для удаленных предмета и изображения начала координат помещены в полюсы  $O$  и  $O'$ , оси  $z$  и  $z'$  проходят через центры зон  $A_0$  и  $A'_0$ .

$$x = \begin{cases} \mathbf{a} & \text{– линейные для близкого предмета} \\ -\mathbf{a}/r_0 & \text{– угловые для удаленного предмета} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$x = \begin{cases} n\mathbf{q}_0 & \text{– угловые для близкого предмета} \\ -n\mathbf{q}_0 r_p = -n\mathbf{p}_0 & \text{– линейные для удаленного предмета} \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $r_p$  – радиус входной сферы, имеющей центр в точке  $A_0$  и проходящей через полюс  $0$ ;  $\mathbf{p}_0$  – проекция точки  $P_0$  пересечения луча  $A_0P_d$  со сферой  $S_p$  на координатную плоскость  $xoy$  (рис. 3). При таких определениях получим для близкого предмета

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}} = -n\mathbf{q}_0 = -\mathbf{y}; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}^2} = -n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}$$

для удаленного предмета

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{a}} r_p = n\mathbf{q}_0 r_p = -n\mathbf{p}_0 = -\mathbf{y}; \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}^2} r_p^2 = -r_p^2 n \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}}$$

В случае удаленного предмета вектор  $\mathbf{q}$  определяется положением точки на предмете и на входной сфере

$$\mathbf{q} = -\frac{\mathbf{p}}{r_0} + \frac{\mathbf{a}}{r_0}$$

поэтому

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{a}} = -\frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{a}} - I \right) = \frac{1}{r_p^2} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{r_p} I$$

откуда

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mathbf{a}} = -n \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + r_p I = -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} + r_p I$$

где  $I$  – единичная матрица. Член  $r_p I$  может быть исключен, если для этого случая рассматривать поверхность предмета как сферу, концентричную полюсу  $P_0$  (см. [10]). Введем обозначение

$$T = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{cases} n \frac{\partial q}{\partial x} = n \frac{\partial q}{\partial a} & \text{для близкого предмета} \\ n \frac{\partial p}{\partial x} = -r_p \frac{\partial p}{\partial a} & \text{для удаленного предмета} \end{cases}$$

где  $T$  – симметрическая  $2 \times 2$  матрица. Легко увидеть, что  $T$  есть матрица параметров бесконечно узкого пучка, сходящегося в точке  $P_d$ , аналогичная описанной в [10] матрице  $T'$  в пространстве изображений.

В результате выражение (2.2) приобретает в обобщенных координатах универсальный вид как для близкого, так и для удаленного предмета

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d) = E(0, \mathbf{p}_d) - \mathbf{x}^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T T \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Подставим (2.6) в выражение (2.1), заменив также  $\tau(\mathbf{a}, \mathbf{p}_d)$  на  $\tau(0, \mathbf{p}_d)$  – для луча  $A_0P_d$ , принимая, что пропускание вдоль луча не изменяется существенно в пределах зоны.

Кроме того, введем в (2.1) обобщенные координаты на предмете в соответствии (2.4) и обобщенные зрачковые координаты в соответствии с (2.5). Тогда для дифференциала  $d\mathbf{a}$  поверхности  $S_a$  и для  $d\Omega$  имеем

$$d\mathbf{a} = \begin{cases} d\mathbf{x} \\ r_p^2 d\mathbf{x} \end{cases}; \quad \partial\Omega = \frac{\partial\mathbf{q}}{q_z} = \frac{1}{q_z n^2} = \frac{1}{q_z n^2} \begin{cases} dy & \text{для близкого предмета} \\ \frac{dy}{r_p^2} & \text{для удаленного предмета} \end{cases}$$

Учтем также, что при выражении поля  $U(\mathbf{a})$  в обобщенных координатах в виде  $U(\mathbf{x})$  для удаленного предмета добавляется множитель  $r_0$  из требования независимости энергии от радиуса  $r_p$ :  $U(\mathbf{x}) = r_p U(\mathbf{a})$ . Окончательно получаем

$$U(\mathbf{p}_d) = \frac{i}{\lambda} \exp[-ikE(0, \mathbf{p}_d)] \tau^{1/2}(0, \mathbf{p}_d) \left(q_z \frac{dy}{dp_d}\right)^{1/2} \times \int \int_{S_a} U(\mathbf{x}) \exp\left[\frac{ik}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{y}\right] d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

При прохождении поля через апертурную диафрагму его комплексная амплитуда умножается на функцию комплексного пропускания диафрагмы  $f_d(\mathbf{p}_d)$

$$U'(\mathbf{p}_d) = U(\mathbf{p}_d) f_d(\mathbf{p}_d) \quad (2.8)$$

где

$$f_d(\mathbf{p}_d) = \begin{cases} \tau_d^{1/2}(\mathbf{p}_d) \exp[-ikl_d n_d] & \text{внутри контура диафрагмы} \\ 0 & \text{вне контура} \end{cases}$$

$\tau_d(\mathbf{p}_d)$  – энергетический коэффициент пропускания, а  $l_d n_d$  – оптическая толщина амплитудно-фазового фильтра, если он помещен в диафрагму.

Можно записать (2.8) в виде

$$f_d(\mathbf{p}_d) = \begin{cases} \exp[-ikl_d n_d] \\ 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

где  $\bar{n}_d = n'_d - ix_d$  – комплексный показатель преломления фильтра [3].  $x_d$  – показатель поглощения.

Распространение дифрагированного поля от апертурной диафрагмы до поверхности изображения описывается интегралом вида (2.1)

$$U'(\mathbf{a}') = \frac{i}{\lambda} \int \int_{S_a} U'(\mathbf{p}_d) \tau^{1/2}(\mathbf{p}_d, \mathbf{a}') \exp[-ikE(\mathbf{p}_d, \mathbf{a}')] K'(\mathbf{p}_d, \mathbf{a}') d\mathbf{p}_d \quad (2.10)$$

где  $\mathbf{a}'$  – радиус-вектор точки  $A'$  на изображении,

$$K'(\mathbf{p}_d, \mathbf{a}) = \left( \frac{n_d^2 d\Omega_d}{d\mathbf{a}' \cos \alpha'} \right)^{1/2} = \left( \frac{n_d^2 d\Omega_d}{d\mathbf{a}' q'_z} \right)^{1/2}$$

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным при выводе формулы (2.6), представим  $E(\mathbf{p}_d, 0)$  в виде

$$E(\mathbf{p}_d, \mathbf{a}') = E(\mathbf{p}_d, 0) + \mathbf{x}'^T \mathbf{y}' + \frac{1}{2} \mathbf{x}'^T T' \mathbf{x}' \quad (2.11)$$

где  $E(\mathbf{p}_d, 0)$  – оптическая длина луча  $P_d A'_0$  от точки  $P_d$  до центра  $A'_0$  зоны изображения (рис. 3,  $\mathbf{x}'$  – вектор обобщенных координат на изображении,  $\mathbf{y}'$  – вектор обобщенных выходных зрачковых координат

$$\mathbf{x}' = \begin{cases} \mathbf{a}' \\ -\frac{\mathbf{a}'}{r'_p} \end{cases}; \quad \mathbf{y}' = \begin{cases} n' \mathbf{q}'_0 & \text{для близкого изображения} \\ n' \mathbf{p}'_0 = -n' r'_p \mathbf{q}' & \text{для удаленного изображения} \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь  $\mathbf{q}'_0$  – проекция орта луча  $P_d A'_0$  на координатную плоскость  $xoy$ ,  $\mathbf{p}'_0$  – проекция точки  $P'_0$  пересечения этого луча с выходной сферой на координатную плоскость  $xoy$ .  $T'$  – симметрическая матрица  $2 \times 2$  производных  $\partial \mathbf{y}' / \partial \mathbf{x}'$

$$T' = \frac{\partial \mathbf{y}'}{\partial \mathbf{x}'} = \begin{cases} n' \frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial \mathbf{a}'} & \text{для близкого изображения} \\ -n' \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{a}'} r'_p & \text{для удаленного изображения} \end{cases} \quad (2.13)$$

$T'$  есть матрица параметров в пространстве изображений бесконечно узкого пучка, выходящего из точки  $P_d$ .

Выразим дифференциал площадки  $d\mathbf{a}'$  в формуле для  $K'$  в обобщенных координатах в виде  $d\mathbf{a}' = d\mathbf{x}'$  для близкого изображения и  $d\mathbf{a}' = r_p'^2 d\mathbf{x}'$  для удаленного изображения, а также сделаем замену переменных в интеграле (2.10)  $d\mathbf{p}_d = d\mathbf{y}' (d\mathbf{p}_d / d\mathbf{y}')$ . Подставляя в (2.10) поле на диафрагме из (2.8), получим

$$\begin{aligned} U'(x') &= \frac{1}{\lambda^2} \iint_{SY'} \exp(-ikx'^T T' x') \exp(-ikx'^T y') \tau^{1/2}(0, p_d) \tau^{1/2}(p_d, 0) \times \\ &\times \exp[-ikE(p_d, 0)] \exp[-ikE(0, p_d)] f_d(p_d) \left( \frac{q_z d_y n_d^2 d\Omega_d dp_d}{q'_z dx' (dy')^2} \right)^{1/2} \times \\ &\times \iint_{SX} U(x) \exp[ikx^T Tx] \exp[ikx^T y] dx dy' \end{aligned} \quad (2.14)$$

Рассмотрим множитель  $K = ((q_z d_y n_d^2 d\Omega_d dp_d / a'_z dx' (dy')^2)^{1/2})$ . В соответствии с теоремой изопланатизма [10], дифференциалы площадок в зрачковых координатах  $dy$  и  $dy'$  связаны между собой через модуль определителя матрицы  $V$  обобщенных увеличений для данного луча (данной

точки зрачка):  $dy = \|V\| dy'$ . Кроме того,  $n^2 d\Omega_d d\mathbf{p}_d = dx' dy'$  в силу инвариантности оптического дифференциала [8]. При соблюдении изопланатизма  $\|V\| = const$  для всех точек зрачка, отступления от этого условия из-за неизопланатизма в практических случаях не превышают нескольких процентов и ими можно пренебречь.

Член  $((q_z / q'_z)^{1/2})$  также мало отличается от постоянной. Так, например, в предельных случаях для близкого предмета или изображения, когда  $\sin \sigma \approx 0.8$ ,  $a_z^{1/2} = 0.78$ ; при  $\sin \sigma \approx 0.5$ ,  $q_z^{1/2} = 0.93$ . С учетом сказанного получаем

$$K \cong \|V\| = const$$

Объединим в выражении (2.14) множители

$$\tau(0, \mathbf{p}_d) \tau(\mathbf{p}_d, 0) \tau_d(\mathbf{p}_d) = \tau(\mathbf{y}')$$

и

$$\exp[-ikE(0, \mathbf{p}_d)] \exp[-ikE(\mathbf{p}_d, 0)] \exp[-ikl_d n_d] = \exp[-ik\omega(\mathbf{y}')],$$

где  $\omega(\mathbf{y}')$  и  $\tau(\mathbf{y}')$  – оптическая длина и энергетический коэффициент пропускания луча, выходящего из центра зоны предмета  $A_0$ , в общем случае наличия aberrаций терпящего излом в точке апертурной диафрагмы  $P_d$  и попадающего в центр зоны изображения  $A'_0$  как функции зрачковых координат  $\mathbf{y}'$  этого луча.

Существенно, что  $\omega(\mathbf{y}')$  именно та aberrационная функция, которая введена автором [10] для описания aberrаций оптических систем исходя из требований теории изопланатизма.

В итоге выражение (2.4), описывающее распространение поля через оптическую систему приобретает вид

$$U'(\mathbf{x}') = \frac{\|V\|^{1/2}}{\lambda^2} \iint_{SY'} \exp(-ik\mathbf{x}'^T T' \mathbf{x}') \exp(-ik\mathbf{x}'^T \mathbf{y}') f(\mathbf{y}') \times \quad (2.15)$$

$$\times \iint_{S_x} U(\mathbf{x}) \exp(ik\mathbf{x}^T T\mathbf{x}) \exp(ik\mathbf{x}^T \mathbf{y}) dx dy$$

где

$$f(\mathbf{y}') = \begin{cases} \tau^{1/2}(\mathbf{y}') \exp[-ik\omega(\mathbf{y}')] & \text{внутри контура зрачка} \\ 0 & \text{вне контура зрачка} \end{cases}$$

зрачковая функция, объединяющая в себе действие собственно оптической системы (aberrации и энергетическое пропускание) и действие апертурной диафрагмы и стоящего в ней фильтра. Под контуром зрачка понимается контур диафрагмы, выраженный в зрачковых координатах  $\mathbf{y}'$ . Выражение (17) может быть записано в виде последовательности трех преобразований:

1-я дифракция

$$U(\mathbf{y}) = \iint_{SX} U(\mathbf{x}) \exp[-ik\mathbf{x}^T T\mathbf{x}] \exp(ik\mathbf{x}^T \mathbf{y}) dx \quad (2.16)$$

фильтрация и преобразование зрачковых координат (влияние оптической системы и диафрагмы)

$$U'(\mathbf{y}') = U(\mathbf{y})f(\mathbf{y}') \frac{\|V\|^{1/2}}{\lambda^2}; \quad \mathbf{y}' = V^{T-1}\mathbf{y} \quad (2.17)$$

2-я дифракция

$$U'(\mathbf{x}') = \iint_{S_{y'}} U'(\mathbf{y}') \exp[-ik\mathbf{x}'^T T\mathbf{x}'] \exp[-ik\mathbf{x}'^T \mathbf{y}'] d\mathbf{y}' \quad (2.18)$$

Если обобщенные координаты на предмете и изображении нормировать к длине волны, т.е. принять  $\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{x} / \lambda$ ;  $\mathbf{x}'_\lambda = \mathbf{x}' / \lambda$ , а матрицы  $T$  и  $T'$  считать постоянными для данной зоны (что, к сожалению, можно сделать далеко не всегда), то интегралы (2.16) и (2.18) переходят в точные Фурье-преобразования и распространение поля через систему записывается в виде схемы

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}_\lambda) \exp(-2\pi\mathbf{x}_\lambda^T T\mathbf{x}_\lambda) &\xrightarrow{F} U(\mathbf{y})f(\mathbf{y}') \frac{\|V\|^{1/2}}{\lambda^2} = \\ &= U'(\mathbf{y}') \xrightarrow{F^{-1}} U'(\mathbf{x}'_\lambda) \exp(-2\pi\lambda\mathbf{x}'_\lambda{}^T T\mathbf{x}'_\lambda) \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $F$  и  $F^{-1}$  – прямое и обратное Фурье-преобразования.

В некогерентном случае квадратичные фазовые члены  $\exp[-2\pi\lambda\mathbf{x}_\lambda^T T\mathbf{x}_\lambda]$  и  $\exp[-2\pi\lambda\mathbf{x}'_\lambda{}^T T\mathbf{x}'_\lambda]$  при постоянных матрицах  $T$  и  $T'$  могут не включаться в рассмотрение, в когерентном случае входной член  $\exp[-2\pi\lambda\mathbf{x}_\lambda^T T\mathbf{x}_\lambda]$  может быть скомпенсирован соответствующим выбором осветителя; при малых размерах зон этими членами можно пренебречь и при непостоянных матрицах  $T$  и  $T'$ .

#### 4. Обсуждение результатов

Итак, мы получили выражения, описывающие формирование изображения в оптических системах любого типа в рамках дифракционной скалярной теории с учетом ограничения пучков реальной апертурной диафрагмой. Внешне при малых размерах зон или постоянных  $T$  и  $T'$  эти выражения похожи на схему с двойной дифракцией [4], но они не содержат неопределенности, связанной с выбором входных и выходных зрачков, дифракция рассматривается только на реальных физических поверхностях, а обобщенные зрачковые координаты – это «лучевые» координаты на входе и выходе из системы левой и правой поверхностей реальной апертурной диафрагмы. В отличие от существующих моделей, в нашей схеме учитывается не только ограничение размеров пучка, но и положение в системе ограничивающей апертурной диафрагмы. От этого положения зависят матрицы  $T$  и  $T'$ , а также, как ясно из их определения, обобщенные зрачковые координаты  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{y}'$ , в которых описывается преобразование поля.

Важно также подчеркнуть, что в предложенной модели влияние оптической системы описывается теми же понятиями – абберационной функцией и обобщенными зрачковыми координатами, которые были введены

при рассмотрении теории изопланатизма [10] из чисто геометрических соображений, таким образом, мы получаем единую теорию оптического изображения без традиционного разделения на геометрическую теорию (основанную на эйконалах) и физическую (основанную на волновой абберации) [6].

Заметим, что энергетический коэффициент пропускания  $\tau(\mathbf{y}')$  и абберационная функция  $u'(\mathbf{y}')$  могут быть объединены в одну комплексную функцию, полностью описывающую свойство оптической системы

$$\bar{\omega}(\mathbf{y}') = \omega(\mathbf{y}') - \frac{i}{2k} \ln \tau(\mathbf{y}')$$

причем эта комплексная абберационная функция может быть определена как комплексная оптическая длина ломаного луча  $A_0 P_d A'_0$

$$\bar{\omega}(\mathbf{y}') = \int_{A_0 P_d A'_0} \bar{n} dl$$

где  $\bar{n}$  – комплексный показатель преломления среды.

Зрачковая функция в этом случае выражается в наиболее простом виде

$$f(\mathbf{y}') = \begin{cases} \exp[-ik\bar{\omega}(\mathbf{y}')] \\ 0 \end{cases}$$

Для некогерентных систем передача изображения [3,4] описывается такими характеристиками, как функция рассеяния точки (ФРТ) и оптическая передаточная функция (ОПФ). Применяя схему (21) для предмета в виде точки (дельта-функции) и пренебрегая квадратичными членами из-за малых размеров предмета и изображения, получим, что ФРТ и ОПФ связаны известными [3,4] выражениями с нашей зрачковой функцией, представленной в обобщенных зрачковых координатах, а именно ФРТ пропорциональна квадрату модуля Фурье-образа зрачковой функции

$$\Phi_{PT} = h\left(\frac{\mathbf{x}'}{\lambda}\right) = c|F[f(\mathbf{y}')]|^2$$

а ОПФ есть ее автокорреляция

$$OПФ = D(\mathbf{v}' \lambda) = f * f^* = \iint f(\mathbf{y}') f^*(\mathbf{y}' - \mathbf{v}' \lambda) d\mathbf{y}'$$

где  $\mathbf{v}'$  – вектор пространственных частот, звездочка означает комплексное сопряжение

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Abbe. Archiv Mikroskopische Anat. 9. 413. 1873.
2. Rayleigh. Phil. Mag., 42. 167. 1896.
3. М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. – М. «Наука». 1970.
4. Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику. – М. «Мир». 1970.
5. R. K. Luneburg. Mathematical theory of optics. Univ. California press. Berkeley and Los Angeles. 1964.
6. Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. – Л. «Машиностроение». 1969.

7. А. Зоммерфельд. Оптика. – М. ИЛ. 1953.
8. М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. – М. ИЛ. 1962.
9. Н. Н. Hopkins. Proc. Roy. Soc. A208. 1951. 263.
10. С. А. Родионов. Опт. и спектр. 46. 1979. 776