АППРОКСИМАЦИЯ АБЕРРАЦИЙ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВЫХ, ПОПЕРЕЧНЫХ И ПРОДОЛЬНЫХ АБЕРРАЦИЙ

С. А. РОДИОНОВ, Н. Б. ВОЗНЕСЕНСКИЙ

Предлагается метод аппроксимации аберраций оптических систем, в котором используются в совокупности значения волновых, поперечных и продольных аберраций в узловых точках зрачка, полученные, например, расчетом лучей. При этом сокращается требуемое количество лучей и повышается точность аппроксимации.

Необходимым этапом автоматизированного проектирования оптических систем на ЭВМ является аппроксимация аберраций, т.е. представление функции аберрации в виде разложения по некоторому базису и определение коэффициентов разложения из данных, полученных расчетом лучей через некоторое множество точек зрачка.

Важными моментами при решении задачи аппроксимации являются: выбор функции аберрации для аппроксимации, выбор базиса, выбор данных, определяемых расчетом лучей и, наконец, метода определения неизвестных коэффициентов по этим данным.

В настоящее время для аппроксимации выбирают либо функцию волновой, либо функции поперечных аберраций, используя в качестве базиса степенные функции или ортогональные полиномы Цернике [3, 4], в качестве данных используются значения аппроксимируемой функции в точках зрачка (узлах) и коэффициенты находятся методом наименьших квадратов (МНК).

В связи с последним следует заметить, что МНК требует значительной избыточности количества данных по сравнению с количеством коэффициентов, за счет которой он позволяет сгладить случайные ошибки данных [1]. В ситуациях, когда эти ошибки пренебрежимо малы, как, например, при использовании данных, полученных расчетом лучей на ЭВМ, применение МНК теряет свой смысл, в этом случае проще и рациональнее использовать интерполяционные коэффициенты. Применение МНК естественно и оправдано лишь при аппроксимации аберраций по экспериментальным данным, содержащим ошибки измерения, например, при исследовании оптических систем интерферометрическим методом, методом Гартмана и т.п. В дальнейшем будем рассматривать метод интерполяции.

В соответствии с этим методом аппроксимируемая функция $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ - вектор координат на зрачке, представляется в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j P_j(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

где $P_j(\mathbf{x})$ – функции базиса; c_j – коэффициенты аппроксимации, которые находятся из системы n уравнений, полученных из условий равенства значений функции и ее аппроксимации в узлах:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j P_j(x_j) = f(x_i) = f_i; \;\; i = 1, n. \qquad (2)$$

В матричной записи система (2) будет иметь вид

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b}, \qquad (3)$$

где $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ – вектор неизвестных коэффициентов, $в = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец правых частей, составленных из значений функции в узлах, A – квадратная матрица значений функции базиса в узлах:

$$a_{ij} = \{P_j(x_i)\}.$$

Как были указано, в качестве f обычно выбирают либо волновую аберрацию, либо меридиональную или сагиттальную составляющую поперечных аберраций. Для аппроксимации любой из них требуется n ее значений и, следовательно, расчет n лучей из данной точки предмета. Такой подход нельзя признать правильным, так как при этом игнорируется тот факт, что все эти функции связаны между собой – поперечные аберрации с точностью до постоянных множителей есть частные производные волновой аберрации по координатам на зрачке [2]. Более разумно строить аппроксимацию волновой аберрации как основной функции, описывающей свойства оптической системы, а поперечные аберрации использовать в качестве дополнительных данных о частных производных аппроксимируемой функции в узлах. На основе, этого можно существенно уменьшить количество лучей, необходимое для аппроксимации, поскольку расчет каждого луча дает в общем случае три числа – значения волновой аберрации и двух ее частных производных – поперечных аберраций. Если произвести в каждом узле, кроме основного луча, также расчет лучей, бесконечно близких к нему (дифференциалов луча), можно получить также и вторые производные волновой аберрации, использование их при аппроксимации позволяет еще в большей степени сократить необходимое число лучей.

Рассмотрим предложенную методику применительно к осевой точке центрированных систем. В этом случае, благодаря осевой симметрии, функция волновой аберрации $W(\rho)$ зависит только от одной координаты ρ – относительного радиуса на зрачке ($0 \le \rho \le 1$). Запишем выражение для аппроксимации $W(\rho)$ ортогональными полиномами Цернике:

$$W(\rho) = \sum_{j=1}^{n} c_j P^0_{2(j-1)}(\rho) = \sum_{j=1}^{n} C_j Q^0_{j-1}(t),$$

где $t = \rho^2$, $Q^0_{j-1}(t)$ – полиномы степени n от t, ортогональные па отрезке (0, 1).

Расчет одного луча с координатой t_k дает значение волновой аберрации $W_k = W(t_k)$ в данном узле и значение поперечной аберрации, т. е. производной $W'_k = W'_p(t_k)$. Расчет вместе с основным лучом дифференциала луча дает вторую производную $W''_k = W''_p(t_k)$, которая с точностью до постоянного множителя есть продольная аберрация. Таким образом, расчет каждого луча порождает в узле три значения данных и, следовательно, три уравнения для определения искомых коэффициентов c_j. Запишем результирующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} c_j Q_{j-1}^{0}(t_k) = W_k \\ &\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial Q_{j-1}^{0}}{\partial \rho}(t_k) = W'_k \\ &\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial^2 Q_{j-1}^{0}}{\partial \rho^2}(t_k) = W''_k \end{aligned}\right\} k = 1, \frac{n}{3}. \qquad (4)$$

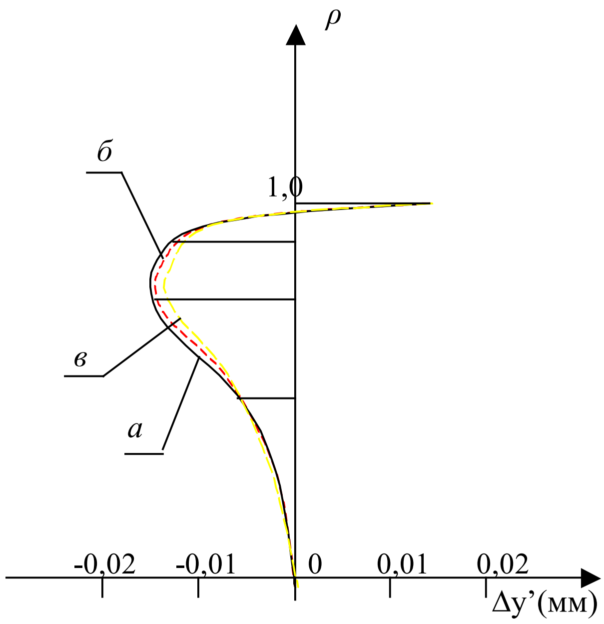
Матрица A системы (4), представленной в матричной записи (3), состоит из трех подматриц размерности $n/3 \times n$, содержащих значения n полиномов Q, их первых и вторых производных по ρ в $n/3$ узлах, аналогично столбец свободных членов состоит из трех столбцов длиной $n/3$ каждый, содержащих значения волновой аберрации W_k, ее первых W'_k и вторых W''_k производных:

$$A = \begin{pmatrix} Q \\ Q'' \\ Q' \end{pmatrix}; \quad \text{в} = \begin{pmatrix} W \\ W' \\ W'' \end{pmatrix},$$

где $q_{ij} = \{Q_{j-1}^{0}(t_i)\}$; $q'_{ij} = \left\{\dfrac{\partial Q_{j-1}^{0}(t_i)}{\partial \rho}\right\}$; $q''_{ij} = \left\{\dfrac{\partial^2 Q_{j-1}^{0}(t_i)}{\partial \rho^2}\right\}$;

$$W = \{W_i\}; \quad W = \{W_i\}; \quad W = \{W_i\}; \quad i = 1, n/3; \quad j = 1, n.$$

Решение системы (3), записанное в матричном виде $\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b}$, дает вектор неизвестных коэффициентов. При фиксированном выборе узлов матрица A^{-1} может быть рассчитана заранее и тогда процесс нахождения коэффициентов c_j для конкретной оптической системы состоит в получении для нее расчетом лучей столбца правых частей **b** и умножений на него константной матрицы A^{-1}. Для аппроксимации аберрации в осевой точке, например, семью полиномами Цернике (до 11-го порядка аберраций) по первому способу, с использованием только значений волновой или только поперечной аберрации, требуется расчет шести лучей, а по предложенному методу – только двух (седьмое уравнение добавляется из общего для всех систем условия $W(0) = 0$).



В качестве примера в таблице приведены значения коэффициентов (в длинах волн) разложения, полученные обоими способами для светосильного фотообъектива ($f'=100;\ D:f'=1:1$).

Коэффициенты Цернике	c_{20}	c_{40}	c_{60}	c_{80}	c_{100}	c_{120}
I способ – лучей	-5,666	0,217	0,758	0,077	0,010	0,001
II способ – луча	-5,634	0,233	0,745	0,072	0,008	0,003

На рисунке приведены графики поперечных аберраций этого объектива, полученные а) точным расчетом луча; б) из аппроксимации по первому способу; в) из аппроксимации по второму способу.

Хорошее совпадение результатов свидетельствует как об эффективности предложенного метода аппроксимации с использованием первых и вторых производных, так и о достаточной надежности вообще метода интерполяции, исключающей необходимость применения МНК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Худсон Д. *Статистика для физиков*. М.: Мир, 1970.
2. Слюсарев Г. Г. *Методы расчета оптических систем*. Л.: Машиностроение, 1969.
3. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М.: Наука, 1970.
4. Zernike F. *Beugungstheorie des Schneidenverfahrens und Seiner Verbesserten Form, der Phasenkontrast– methode*. – Physica, 1, 689 (1934).