

ОБ ОПИСАНИИ ОПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОГРАММАХ РАСЧЕТА ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ЭВМ

С. А. РОДИОНОВ

Рассматриваются два типа универсальных уравнений, позволяющих описать в декартовой системе координат практически все применяемые в оптических системах поверхности.

Одним из основных модулей любой программы автоматизированного проектирования оптических систем на ЭВМ является расчет луча через оптическую поверхность, причем эффективность этой процедуры существенно зависит от принятого описания поверхности. Известные многочисленные описания оптической поверхности [1–7] недостаточно универсальны, содержат избыточные параметры и т. д.

В связи с перспективами широкого развития автоматизированных систем проектирования в оптике необходимо иметь достаточно простое и универсальное описание, которое можно положить в основу стандартной процедуры расчета луча.

При расчетах на ЭВМ оптическую поверхность принято описывать в декартовой системе координат, начало которой помещено в вершину поверхности, ось x направлена по нормали к поверхности (система Федера [1]). В общем случае уравнение поверхности в системе координат x, y, z записывается в виде

$$F(x, y, z, a_1, \dots, a_n) = 0, \quad (1)$$

где a_1, \dots, a_n – параметры уравнения. При указанном выборе системы координат уравнение (1), очевидно, не должно содержать свободных членов.

Рассмотрим сначала поверхности вращения вокруг оси x . В уравнение таких поверхностей координаты y, z войдут только в комбинации $u = y^2 + z^2$. В основном для описания поверхностей вращения применяются следующие типы уравнений [1–7]:

$$u = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_nx^n, \quad (2)$$

$$x = a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n, \quad (3)$$

$$x = \frac{\rho_0 u}{1 + \sqrt{1 - \rho_0^2 u}} + a_1u + a_2u^2 + \dots + a_nu^n, \quad (4)$$

$$x = \frac{\rho_0 u}{1 + \sqrt{1 - \rho_0^2 (1 - e^2) u}} + a_2u^2 + \dots + a_nu^n, \quad (5)$$

где ρ_0 – кривизна при вершине, e^2 – квадрат эксцентриситета образующей.

Ни одно из этих уравнений не обладает универсальностью. Так, уравнение (2) не пригодно для описания поверхностей типа пластин Шмидта, у которых u

– многозначная функция от x , и planoидных поверхностей ($\rho_0 = \frac{2}{b_1} = 0$), уравнения (3)-(5) не пригодны для описания глубоких поверхностей с деформациями высшего порядка. Параметры этих уравнений по-разному связаны с такими инвариантными свойствами поверхности, как кривизна при вершине, эксцентриситет образующей, отклонение от базовой сферы, мало наглядны и не всегда представимы в машине. Например, в уравнении (3) параметры a_k , описывающие деформации высшего порядка при величине самой деформации порядка 10^{-3} , u – порядка 10^4 (световом диаметре порядка 100), имеют величину $10^{-(4k+3)}$, что для многих ЭВМ при $k > 4$ представляется как машинный ноль.

Для получения универсального уравнения начнем с наиболее распространенной поверхности – сферы, уравнение которой имеет вид

$$F(x, y, z, \rho_0) = x - \rho_0 / 2(u + x^2) = 0. \quad (6)$$

коэффициенты уравнения выбраны таким образом, чтобы частные производные уравнения по координатам были равны проекциям единичного для сферы вектора нормали N к поверхности, направленного из предыдущей среды, т. е. по оси x в начале координат. Дифференцируя (6), получаем

$$N = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_0 x \\ -\rho_0 y \\ -\rho_0 z \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Легко убедиться, что $N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1$ и при $x=0$ $N_x = 1 > 0$, т. е. оба требования относительно нормали выполняются.

Для описания поверхности вращения второго порядка уравнение (6) дополняется еще одним параметром e^2 :

$$F(x, y, z, \rho_0, e^2) = x - \rho_0 / 2[u + (1 - e^2)x^2] = 0. \quad (8)$$

Введем в уравнение (8) полиномы деформации высшего порядка от x и от u , нормируя переменные u и x к некоторым заданным значениям, h_u^2 и h_x , которые удобно выбирать близкими к световым габаритам поверхности. Таким образом, получаем простую форму универсального уравнения поверхности вращения высшего порядка, включающую в себя все рассмотренные выше типы:

$$F(x, y, z, \rho_0, e^2, b_k, a_k) = x_{II} - \rho_0 / 2[u_{II} + (1 - e^2)x_{II}^2] = 0, \quad (9)$$

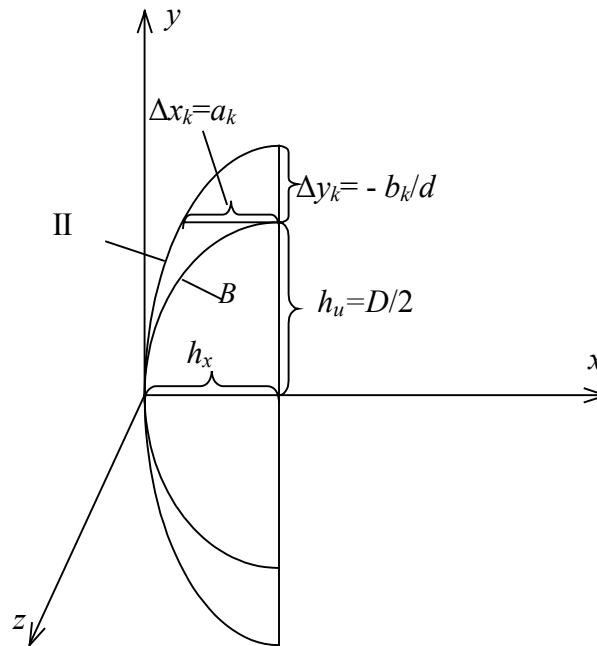
где

$$x_{II} = x - P(u); \quad u_{II} = u - P(x);$$

$$P(x) = b_3\omega^3 + b_4\omega^4 + \dots + b_n\omega^n; \quad \omega = x/h_x; \quad (10)$$

$$P(u) = a_3\omega^3 + a_4\omega^4 + \dots + a_n\omega^n; \quad \omega = u/h_u^2.$$

Параметрами этого уравнения являются: кривизна при вершине ρ_0 , квадрат эксцентриситета образующей e^2 , нормировочная стрелка h_x , коэффициенты деформации b_k высшего порядка по x , нормировочная высота h_u и коэффициенты деформации a_k высшего порядка по u .



(Оба типа деформации обычно вместе не употребляются). Коэффициенты a_k и b_k имеют простой и наглядный смысл – коэффициенты a_k равны соответствующей деформация Δx_k на высоте h_u в осевом направлении x , а коэффициенты b_k – деформации Δy_k в радиальном направлении y , на стрелке h_x , умноженной на диаметр D (см. рисунок, где II – образующая базовой поверхности второго порядка; B – образующая поверхности высшего порядка). Дифференцируя (9) по x, y, z , найдем вектор нормали \mathbf{N} :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{xII} + \frac{\rho_0}{2} P'_x \\ -yE \\ -zE \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где

$$N_{xII} = 1 - \rho_0(1 - e^2)x_{II}; \quad E = \rho_0 + 2P'_u N_{xII};$$

$$P'_x = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{h_x} \frac{dP(x)}{d\omega}; \quad P'_u = \frac{dP(u)}{du} = \frac{1}{h_u^2} \frac{dP(u)}{d\omega}.$$

При расчете бесконечно узких пучков через поверхность необходимо знать матрицу производных вектора нормали по радиус-вектору \mathbf{S} точки на поверхности, т. е. матрицу вторых производных уравнения (9). Дифференцируя (11) по x, y, z , получаем искомую матрицу $\mathbf{R} = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{S}}$:

$$\mathbf{R}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \rho_0 \left[(1 - e^2) - \frac{1}{2} P_x'' \right] & C_y & C_z \\ C_y & E + By^2 & Byz \\ C_z & Byz & E + Bz^2 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где

$$C = -2\rho_0(1 - e^2)P_u'; \quad B = 4\left(P_u''N_{xII} - \frac{1}{2}P_u'C\right);$$

$$P_x'' = \frac{1}{h_x^2} \frac{d^2 P(u)}{d\omega^2}; \quad P_u'' = \frac{1}{h_u^4} \frac{d^2 P(u)}{d\omega^2}.$$

Естественно, что \mathbf{R} – симметрическая матрица. В частном случае сферы матрица \mathbf{R} , как и следовало ожидать, переходит в единичную матрицу, умноженную на кривизну ρ_0 :

$$\mathbf{R} = \rho_0 \mathbf{I}. \quad (13)$$

Уравнение цилиндров получается из (9), если в нем вместо $u = y^2 + z^2$ считать $u = z^2$ для цилиндров с осью, параллельной оси y , и $u = y^2$ – для цилиндров с осью, параллельной оси z .

Вектор нормали \mathbf{N} и матрица \mathbf{R} получаются из выражений (11), (12), если в них члены, соответствующие координате, параллельной оси Цилиндра, положить равными нулю. Например, для цилиндров с осью, параллельной оси y , вторая строка вектора \mathbf{N} и вторые строка и столбец матрицы \mathbf{R} равны нулю.

Из уравнения (9) можно получить и более общее уравнение, если положить $u = \alpha y^2 + z^2$, где α – некоторый коэффициент. Это уравнение описывает любые поверхности второго порядка и поверхности, отличающиеся от них деформациями высшего порядка.

Из применяющихся в оптике поверхностей, не описываемых уравнением (9), остаются торы. Существует несколько форм уравнений торов [6,7]. Потребуем, чтобы в тех случаях, когда тор вырождается в сферу или цилиндр, уравнение тора давало те же значения вектора нормали \mathbf{N} и матрицы \mathbf{R} , что и уравнение (9). При этом приходим к выбору уравнения торов в виде [7] (для тора с осью вращения, параллельной оси y):

$$F(x, y, z, \rho_y, \rho_z) = x - \frac{1}{2} \rho_z (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\Delta \rho y^2}{1 + \sqrt{1 - \rho_y^2 y^2}}, \quad (14)$$

где $\Delta \rho = \rho_y - \rho_z$.

Параметрами этого уравнения являются кривизны ρ_y и ρ_z , причем $\frac{1}{\rho_y}$ – радиус вращающейся окружности, $\frac{1}{\rho_z}$ – радиус вращения.

Дифференцируя (14), получаем выражения для вектора \mathbf{N} и матрицы \mathbf{R} :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 - \rho_z x \\ -\left(\rho_z + \frac{\Delta\rho}{\alpha}\right)y \\ -\rho_z z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho_z & 0 & 0 \\ 0 & \rho_z + \frac{\Delta\rho}{\alpha} \left(1 + \frac{\rho_y^2 y^2}{\alpha^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \rho_z \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\alpha = \sqrt{1 - \rho_y^2 y^2}$.

Легко увидеть, что при $\rho_y = \rho_z$, когда тор вырождается в сферу, выражения (15) становятся идентичными (13) для сферы, при $\rho_y = 0$ или $\rho_z = 0$, когда тор вырождается в круговые цилиндры, выражения (15) идентичны выражениям (11), (12) для цилиндров.

Итак, для описания практически всех применяемых в оптических системах поверхностей достаточно приведенных здесь двух типов уравнений: уравнения (9) для поверхностей вращения вокруг x , цилиндров и поверхностей двоякой кривизны и уравнения (14) для торов, причем сферы, плоскости и круговые цилиндры есть частные случаи обоих типов уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feder D. P. *Optical Calculations with Automatic Computing Machinery*. – Journ. Opt. Soc. of America, vol. 41, № 9, 1951, p.630.
2. Feder D. P. *Differentiation of Ray-Tracing Equations with Respect to Construction Parameters of Rotationally Symmetric Optics*. – Journ. Opt. Soc. of America, vol. 58, № 11, 1968, p.1494.
3. Бабинцев В. Ф. *Формулы для расчета хода луча в оптической системе на электронных цифровых машинах*. – «Оптико-механическая промышленность», 1966 т. 33, № 5, с.14.
4. Пейсахсон И. В., Тарнакин И. Н. *Расчет aberrаций вогнутых дифракционных решеток*. – «Журнал прикладной спектроскопии», 1964, вып. 4, с.289.
5. Пейсахсон И. В., Ефимов В. А. *Расчет хода луча в произвольной оптической системе с помощью ЭВМ*. – «Оптико-механическая промышленность», 1970, т. 37, № 12, с.21.
6. Родионов С. А. *Применение ЭЦВМ в оптических расчетах*. – Изв. вузов СССР – «Приборостроение», 1968, т. 11, № 3. с.103.
7. Патрикеев В. С. *Расчет лучей и бесконечно тонких пучков в оптических системах*. – Труды ГОИ, 1970, т. 37, вып. 167, с.143.