

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ГАРТМАНОВСКОГО ТЕСТА ГЛАВНОГО ЗЕРКАЛА БТА

Канд. наук В. А. ЗВЕРЕВ, канд. наук С. А. РОДИОНОВ, канд. наук М. Н. СОКОЛЬСКИЙ, В.
В. УСОКИН

Описывается математический аппарат обработки результатов контроля главного зеркала БТА по методу Гартмана.

Метод Гартмана, обладающий рядом достоинств, был использован в качестве технологического и аттестационного способа контроля в процессе полировки главного зеркала БТА. Он не требует применения корректора и позволяет без больших трудностей получать результаты в количественной форме. Однако для наиболее полного использования возможностей этого метода и получения необходимой информации о поверхности зеркала требуется довольно сложная обработка результатов при помощи ЭВМ. В статье описывается математический аппарат такой обработки, на основе которого была создана система программ, обеспечивающая контроль поверхности зеркала.

1. СХЕМА КОНТРОЛЯ

Схема контроля зеркала из центра кривизны показана на рисунке. На диафрагме 2, устанавливаемой вблизи зеркала 1, имеется множество отверстий с координатами центров y_d, z_d . При освещении точечным источником света A , находящимся вблизи паракиального центра кривизны C зеркала, на фотопластинке 3 образуется множество пятен рассеяния – «следов» лучей, идущих из точки A , проходящих через точку y_d, z_d и отраженных от зеркала. Координаты центров этих пятен y', z' на снимке («гартманограмме») измеряются и совместно с параметрами схемы контроля служат исходными данными для последующей обработки.

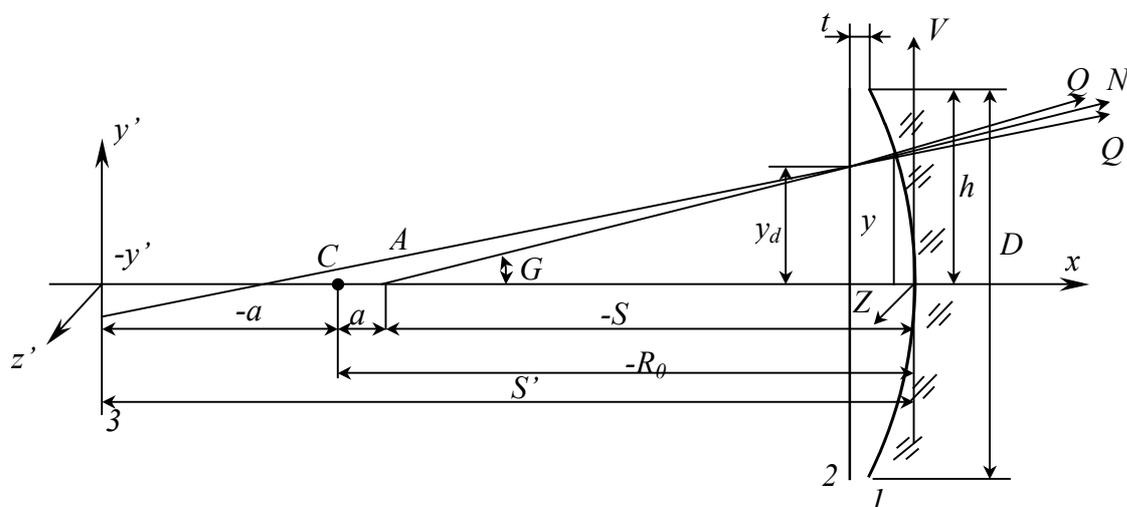


Схема контроля зеркала

Для построения этой обработки прежде всего необходимо связать аналитической зависимостью искомые поперечные aberrации данного луча $\Delta y', \Delta z'$, измеренные координаты y', z' , координаты центра отверстия в диафрагме y_d, z_d и параметры схемы. Предположим сначала, что aberrации отсутствуют, а поверхность диафрагмы совпадает с поверхностью зеркала, и найдем связь координат точки $R(y, z)$ на поверхности зеркала и точки $R'(y', z')$ на поверхности гартманограммы. Вследствие симметрии положим при выводе $z = 0$. Из уравнения параболоида, используя формулы отражения, после преобразования получим

$$y' = y \frac{\rho_0^2 y^2 + \frac{1}{2} \rho_0^4 y^4 - \rho_0 (a - a' + 2 \rho_0 a a')}{1 + \rho_0 a + \frac{1}{2} \rho_0^2 y^2 - \rho_0^3 y^3 a + \frac{1}{2} \rho_0^4 y^4}, \quad (1)$$

где $\rho_0 = 1/R_0$ – кривизна зеркала при вершине; a, a' – смещения источника и пластинки из центра кривизны. Это выражение является точным, но неудобным для использования.

Для получения более простой приближенной формулы оценим допустимую погрешность приближения. Размер дифракционного пятна рассеяния (диска Эри) в угловой мере для исследуемого зеркала составляет $1,22 \cdot \lambda / \text{Арад} = 0,045''$, поэтому погрешность в $0,02''$, равную примерно половине этого пятна, вероятно, можно допустить. В переводе в линейные единицы в центре кривизны это составит $0,02'' R_0 / 2 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$. Максимальная величина y' не превышает 50 мм, поэтому максимальная относительная погрешность оценивается как 10^{-4} . Отсюда при известных границах $|a| < 400, |a'| < 400, |y| < 3000$, можно легко установить какие члены в (1) не превышают 10^{-4} по отношению к наибольшим, и отбросить их.

После преобразований (заменяя для удобства ρ_0 на $-\rho_0$) имеем

$$y' = [a + a' + \rho_0 a (a - a')] \rho_0 y + \left[1 - \frac{1}{2} \rho_0 (a - a') \right] \rho_0^2 y^3. \quad (2)$$

Если источник и пластинку поместить рядом, т. е. сделать $a \approx a'$, то выражение можно упростить ($R_0 > 0$):

$$y' = \frac{a + a'}{R_0} y + \frac{1}{R_0^2} y^3. \quad (3)$$

Благодаря симметрии мы можем в выражениях (2) и (3) заменить y и y' на $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ и $r' = \sqrt{y'^2 + z'^2}$, после чего, умножив их на $\cos \varphi = y/r = y'/r'$ и $\sin \varphi = z/r = z'/r'$, получим

$$y' = y [b_1 + b_3 (y^2 + z^2)]$$

где

$$z' = z \left[b_1 + b_3 (y^2 + z^2) \right]$$

$$b_1 = \frac{1}{R_0} \left[a + a' + \frac{a(a - a')}{R_0} \right] = \frac{a + a'}{R_0} \quad \text{при } a = a',$$

$$b_3 = \frac{1}{R_0} \left[1 - \frac{1}{2R_0} (a - a') \right] = \frac{1}{R_0^2} \quad \text{при } a = a'$$
(4)

Представим теперь, что вследствие отклонения поверхности от номинала, луч имеет абберрации $\Delta y', \Delta z'$. Так как расстояние a' гартманограммы от центра кривизны C на много меньше радиуса R_0 , можно считать, что поперечные абберрации луча в плоскости гартманограммы равны искомым поперечным абберрациям в плоскости, проведенной через центр кривизны (см. рисунок). Тогда $\Delta y', \Delta z'$ можно представить в виде

$$\Delta y' = y' - y \left[b_1 + b_3 (y^2 + z^2) \right]$$

$$\Delta z' = z' - z \left[b_1 + b_3 (y^2 + z^2) \right]$$
(5)

В это выражение входят координаты y, z на зеркале, тогда как мы имеем координаты y_d, z_d на диафрагме. Если известно расстояние t от диафрагмы до зеркала, то легко найти

$$y = y_d \left[1 + \frac{t}{R_0} + \frac{h^2 - y_d^2 - z_d^2}{2R_0} \right],$$

$$z = z_d \left[1 + \frac{t}{R_0} + \frac{h^2 - y_d^2 - z_d^2}{2R_0} \right],$$
(6)

где $h = D/2$ – половина светового диаметра зеркала.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Выражения (5) нельзя непосредственно использовать для определения искомым поперечных аббераций, так как значения входящих в него параметров a и a' не могут быть измерены с требуемой точностью из-за неопределенности положения параксиального центра кривизны C . Кроме того, в (5) отсутствуют параметры, описывающие отступление схемы контроля от идеализированной, показанной на рисунке. К ним относятся l_y, l_z – смещения начала системы координат, в которой измерялись y', z' , с оси зеркала; φ – угол поворота этой системы относительно системы y, z , связанной с зеркалом; σ_y, σ_z – проекции угла наклона нормали к пластинке относительно оси X ; децентрировка диафрагмы c_y, c_z . Значения указанных параметров также не могут быть известны заранее. Определение значений этих параметров и соответствующих им значений поперечных аббераций логично производить методом наименьших квадратов из условия $\sum_i^N (\Delta y_i'^2 + \Delta z_i'^2) = \min$, где суммирование ведется по всем

точкам диафрагмы. Так как зависимость $\Delta y', \Delta z'$ от параметров нелинейна, решение можно получить за несколько шагов последовательных приближений, исходя из некоторых начальных значений параметров. В соответствии с теорией метода наименьших квадратов имеем схему итерационного процесса уточнения параметров

$$\vec{p}^{(k+1)} = \vec{p}^{(k)} - \left(\begin{matrix} \vec{A} & \vec{A} \end{matrix} \right)^{-1} \vec{A}^T \Delta \vec{r}'^{(k)}; k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\vec{p}^{(k+1)}, \vec{p}^{(k)}$ векторы значений параметров на $k+1$ -м и k -м шаге процесса; $\Delta \vec{r}'^{(k)}$ – вектор значений поперечных aberrаций на множестве точек, полученный при векторе параметров $\vec{p}^{(k)}$; \vec{A} – матрица производных поперечных aberrаций по параметрам; T – индекс, обозначающий транспонирование. Структура векторов $\vec{p}, \Delta \vec{r}'$ и матрицы \vec{A} ясна из следующих выражений:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} a + a' \\ l_y \\ l_z \\ \varphi \\ c_y \\ c_z \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \Delta \vec{r}' = \begin{pmatrix} \Delta y'_1 \\ \Delta z'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta y'_N \\ \Delta z'_N \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta y'_1}{\partial (a + a')}, \frac{\partial \Delta y'_1}{\partial l_y}, \dots, \frac{\partial \Delta y'_1}{\partial \sigma_z} \\ \dots \\ \dots \\ \frac{\partial \Delta z'_N}{\partial (a + a')}, \dots, \frac{\partial \Delta z'_N}{\partial \sigma_z} \end{pmatrix}.$$

Выражение для производных \vec{A} имеют вид

$$\frac{\partial \Delta y'}{\partial (a + a')} = -\frac{y}{R_0}, \quad \frac{\partial \Delta z'}{\partial (a + a')} = -\frac{z}{R_0},$$

$$\frac{\partial \Delta y'}{\partial l_y} = 1, \quad \frac{\partial \Delta z'}{\partial l_z} = 1;$$

$$\frac{\partial \Delta y'}{\partial \varphi} = -y' \sin \varphi + z' \cos \varphi, \quad \frac{\partial \Delta y'}{\partial l_z} = 0, \quad \frac{\partial \Delta z'}{\partial l_y} = 0;$$

$$\frac{\partial \Delta z'}{\partial \varphi} = -z' \cos \varphi - y' \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial \Delta y'}{\partial \sigma_y} = \frac{y' y}{R_0}, \quad \frac{\partial \Delta y'}{\partial \sigma_z} = \frac{z' y}{R_0};$$

$$\frac{\partial \Delta z'}{\partial \sigma_y} = \frac{y' z}{R_0}, \quad \frac{\partial \Delta z'}{\partial \sigma_z} = \frac{z' z}{R_0};$$

$$\frac{\partial \Delta y'}{\partial c_y} = \left(-\frac{a+a'}{R_0} + \frac{3y^2+z^2}{R_0^2} \right); \frac{\partial \Delta y'}{\partial c_z} = -\frac{2yz}{R_0^2};$$

$$\frac{\partial \Delta z'}{\partial c_y} = -\frac{2yz}{R_0^2}; \frac{\partial \Delta z'}{\partial c_z} = \left(-\frac{a+a'}{R_0} + \frac{y^2+3z^2}{R_0^2} \right).$$

Практически оказывается достаточно 5-6 шагов.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

Метод наименьших квадратов устойчив только при малых изменениях параметров, когда отступления от линейности невелики. Поэтому начальные значения параметров должны быть достаточно близки к истинным. Отсюда вытекает необходимость предварительного приведения измеренных координат y', z' в систему, начало которой помещено на оси зеркала, а оси параллельны системе y, z . Это приведение легко осуществить, основываясь на симметрии расположения отверстий на диафрагме, вследствие чего начало координат совпадает с первым моментом координат y', z' . Угол поворота легко определяется по какой-либо контрольной точке y'_k, z'_k :

$$y'_i = y'_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y'_i, \quad (7)$$

$$z'_i = z'_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z'_i;$$

$$\cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{c^2 + s^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{s}{\sqrt{c^2 + s^2}},$$

$$c = \frac{y' y'_0 + z' z'_0}{y'^2_0 + z'^2_0},$$

$$s = \frac{y' z'_0 - z' y'_0}{y'^2_0 + z'^2_0};$$

y', z' – измеренные на пластинке координаты после приведения (7); y'_0, z'_0 – координаты, рассчитанные по формуле (4).

Начальное значение $a \approx a'$ можно найти, исходя из размеров гартманограммы, если известен знак a' (для зафокального снимка $a' < 0$, для предфокального $a' > 0$):

для предфокального

$$a \approx a' = \frac{h'}{2h} R_0 - \frac{h^2}{2R_0};$$

для зафокального

$$a \approx a' = -\frac{h'}{2h} R_0 - \frac{h^2}{2R_0},$$

где $h = D/2$ – половина светового диаметра зеркала;
 $h' = (y'_{\max} - y'_{\min})/2 = (z'_{\max} - z'_{\min})/2$ – половина «светового диаметра» гартманограммы. Следует заметить, что минимальные по модулю значения $a \approx a'$ определяют, исходя из условия однозначности зависимостей (4), для чего необходимо сохранение знака производных во всем диапазоне. Исходя из условий $\partial y'/\partial y > 0$ для предфокального снимка и $\partial y'/\partial y < 0$ для зафокального, имеем $a \approx a' > 0$, $a \approx a' < -3h^2/2R_0 = -280\text{мм}$.

Дифференцируя формулы (5), (6), получаем допустимые погрешности координат на диафрагме $\delta y_d, \delta z_d$, а также погрешности в расстоянии t между зеркалом и диафрагмой. При $\delta y', \delta z' \leq 5 \cdot 10^{-3}$ имеем

$$\delta y_d \approx \delta z_d < 1\text{мм}, \delta t < 15\text{мм}.$$

4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ

По найденным после применения метода наименьших квадратов значениям поперечных aberrаций можно восстановить волновой фронт и деформацию поверхности относительно номинальной. Предварительно удобно перевести эти поперечные aberrации в канонические, т. е. нормировать к длине волны, деленной на апертуру, и от aberrаций в направлении y и z перейти к радиальным η_φ и тангенциальным ξ_φ :

$$\eta = \Delta y' \frac{A'_0}{\lambda}, \eta_\varphi = \eta \cos \varphi - \xi \sin \varphi;$$

$$\xi = \Delta z' \frac{A'_0}{\lambda}, \xi_\varphi = \eta \sin \varphi + \xi \cos \varphi,$$

где $A'_0 = h/R_0 = 1/16$ – угловая апертура; λ – длина волны;

$$\cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}; \sin \varphi = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Как известно [1], канонические поперечные aberrации есть частные производные от волновой aberrации по соответствующим каноническим (относительным) координатам на зрачке:

$$\eta = \frac{\partial W}{\partial \beta}, \eta_\varphi = \frac{\partial W}{\partial \rho};$$

$$\xi = \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \xi_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \varphi};$$

$$\beta = \frac{y}{h}, \gamma = \frac{z}{h}, \rho = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2},$$

$$\varphi = \arccos \frac{\beta}{\rho} = \arcsin \frac{\gamma}{\rho}.$$

Деформация поверхности f определяется через волновую aberrацию:

$$f(\rho, \varphi) = \frac{W(\rho, \varphi)}{n' - n} = -\frac{1}{2}W(\rho, \varphi)$$

для отражающей поверхности.

Таким образом, нам необходимо восстановить функцию $W(\rho, \varphi)$ по значениям ее частных производных $\eta_\varphi, \xi_\varphi$ на некотором множестве узлов $\rho_k, \varphi_k; k = 1, \dots, N$. Обычно при использовании метода Гартмана эта задача решается методами численного интегрирования вдоль некоторых траекторий [2], однако при этом в любом случае используется не более половины значений полученных поперечных аберраций и существенно снижается точность восстановления. Описанный ниже метод использует все экспериментальные значения в соответствии с принципом наименьших квадратов сглаживает ошибки измерения.

Запишем разложение функции $W(\rho, \varphi)$ по некоторому базису:

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{i=1}^n b_i P_i(\rho, \varphi).$$

Задача заключается в определении неизвестных коэффициентов разложения b_i . Если бы область определения функции $W(\rho, \varphi)$ (поверхность зеркала) в координатах ρ, φ представляла собой круг, то в качестве базиса естественно было бы взять ортогональные полиномы Цернике [3]. При наличии центрального экранирования эта область имеет вид кольца. По аналогии с полиномами Цернике можно получить полиномы, ортогональные на кольце

$$W(\rho, \varphi) = \sum_{i=0}^m \left\{ a_i Q_i^0(\rho^2) + \sum_{j=1}^k \rho^j Q_i^j(\rho^2) \cdot [c_{ij} \cos(j\varphi) + s_{ij} \sin(j\varphi)] \right\}, \quad (8)$$

где $Q_i^j(t)$ – полиномы, ортогональные на отрезке $(s^2, 1)$ с весом t^j . Для вычисления полиномов $Q_i^j(t)$ используются трехчленные рекуррентные соотношения. Дифференцируя (8), получим поперечные аберрации

$$\eta_\varphi(\rho, \varphi) = \sum_i \left\{ a_i \frac{\partial Q_i^0}{\partial \rho} + \sum_j \frac{\partial(\rho^j Q_i^j)}{\partial \rho} \cdot [c_{ij} \cos(j, \varphi) + s_{ij} \sin(j, \varphi)] \right\}, \quad (9)$$

$$\xi_\varphi(\rho, \varphi) = -\sum_i \sum_j j \rho^{j-1} Q_i^j [c_{ij} \cos(j\varphi) + s_{ij} \sin(j\varphi)]$$

Запишем теперь в матричном виде выражение для поперечных аберраций $n_\varphi(\rho_k, \varphi_k), \xi_\varphi(\rho_k, \varphi_k)$ на множестве узлов ρ_k, φ_k :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}^T \mathbf{B},$$

где $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \eta_\varphi(\rho_k, \varphi_k) \\ \xi_\varphi(\rho_k, \varphi_k) \end{pmatrix}$ – вектор значений поперечных аберраций на множестве узлов ρ_k, φ_k ; \mathbf{G} – матрица значений производных полиномов на этом

множестве; $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_i \\ c_{ij} \\ s_{ij} \end{pmatrix}$ – вектор коэффициентов разложения (9). Количество

узлов (число отверстий в используемой диафрагме) равнялось $N = 224$, количество полиномов $(m+1)(2k+1) = (7+1)(2 \cdot 11+1) = 184$.

Естественно искать вектор коэффициентов \mathbf{B} из условия минимума суммы квадратов разностей измеренных аберраций n_φ, ξ_φ и их представления полиномами, т. е. из условия минимума нормы:

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{G}^T \mathbf{B}\| = (\mathbf{F} - \mathbf{G}^T \mathbf{B})^T \Lambda (\mathbf{F} - \mathbf{G}^T \mathbf{B}) = \min;$$

здесь Λ – диагональная матрица весов множества ρ_k, φ_k точек; искомым вектор \mathbf{B} получен в виде $\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{F}$, где

$$\mathbf{S} = (\mathbf{G}\Lambda\Lambda^T)^{-1} \mathbf{G}\Lambda.$$

Матрица \mathbf{S} зависит только от относительного расположения и количества отверстий в диафрагме, т. е. от множества ρ_k, φ_k узлов, и для данного типа диафрагмы может быть рассчитана заранее. Тогда определение вектора коэффициентов \mathbf{B} разложения (8) сводится к умножению этой матрицы на вектор \mathbf{F} поперечных аберраций. Для вычисления матрицы \mathbf{S} был использован процесс ортогонализации матрицы $\mathbf{G}\Lambda\Lambda^T$ по Граму-Шмидту [4]. Матрица \mathbf{S} при таком методе представляется в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{G}\Lambda,$$

где \mathbf{T} – матрица ортогонализации.

5. ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ ЗЕРКАЛА

Полученная информация о поверхности зеркала $f(\rho, \varphi)$ должна быть максимально наглядной и удобной для технологического использования. Представления функции $f(\rho, \varphi)$ были приняты в виде: часовых «разрезов», т. е. 12 графиков $f(\rho, \varphi_k)$ при $\varphi_k = 0, 30, \dots, 330^\circ$; «карты», т. е. кривых равного уровня $f(\rho, \varphi) = \text{const}$. Перед выводом указанной информации принимались равными нулю коэффициенты c_{01}, s_{01}, a_0, a_1 разложения (8), соответствующие наклонам поверхности, постоянной составляющей и изменению радиуса при вершине. Таким образом, обеспечивался выбор такой номинальной поверхности, относительно которой деформация была бы минимальной в среднеквадратическом смысле.

Остановимся более подробно на построении карты зеркала. Так как печать карты предусматривалась на построчном алфавитно-цифровом печатающем устройстве (АЦПУ), предварительно вычислялась матрица 125×80 значений функции $f(\beta_j, \gamma_i)$ в узлах прямоугольной сетки с шагом $\Delta\beta = 1/40$, $\Delta\gamma = 2/125$, соответствующей 80 строкам и 125 столбцам АЦПУ, образующим квадрат. Затем назначались десять уровней с символами от 0 до 9,

расположенных равномерно от f_{\min} до f_{\max} . При распечатке карты в j -й позиции i -й строки АЦПУ печатался символ k , если удовлетворялись условия

$$f_{ij} < c_k, f_{i,j+1} > c_k$$

или

$$f_{ij} < c_k, f_{i+1,j} > c_k$$

где c_k – значение уровня с номером k ($k = 0, 1, \dots, 9$). В противном случае в данной позиции ничего не печаталось (символ «пробел»).

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ЭНЕРГИИ

Концентрация энергии в пятне рассеяния вычислялась по геометрическим выражениям без учета дифракции, что при размерах кружка рассеяния $0,2-0,5''$, т. е. в несколько раз большего диска Эри, вполне допустимо. Относительная величина энергии E , концентрируемая в кружке углового диаметра d'' , в плоскости установки, смещенной на Δ мм, рассчитывалась по формуле

$$E(d, \Delta) = \left(\sum_{N_{d,\Delta}} \lambda_k \right) / \left(\sum_N \lambda_k \right),$$

где λ_k – веса точек (отверстий), соответствующие относительным размерам площадок на зеркале, представляемых этими точками; N – общее количество точек; $N_{d,\Delta}$ – количество точек, для которых поперечные аберрации $\eta_\varphi, \xi_\varphi$ удовлетворяют условию

$$\left(\eta_\varphi + \Delta \frac{A_0^2}{\lambda} \right)^2 + \xi_\varphi^2 < \frac{d'' h}{2 \cdot 206265 \lambda}, \quad (10)$$

где $A_0 = h/R_0$ – угловая апертура; R_0 – радиус; λ – длина волны; h – половина светового диаметра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopkins H. H. Wave theory of Aberrations. Oxford, 1949.
2. Mayall N. V., Vasilevskis S. - „Astron. J.", 1960, vol. 65, p. 304.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1974.