

# ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО ХРОМАТИЗМА

С. А. Родионов, М. Н. Сокольский и Л. М. Лапо

Показано, что влияние поперечного хроматизма на передаточные характеристики можно рассматривать как работу отдельного прибора с функцией рассеяния точки (ФРТ) и оптической передаточной функцией (ОПФ), зависящей только от поперечного хроматизма и весовой функции. Разработан простой графоаналитический метод построения ФРТ. Приведены результаты исследования влияния коррекции поперечного хроматизма на ФРТ и ОПФ.

## 1. Передаточные характеристики оптических систем при наличии поперечного хроматизма

Часто в оптических системах преобладающей хроматической аберрацией является поперечный хроматизм. В этом случае можно считать, что функция рассеяния точки (ФРТ)  $h(y', z')$ , описывающая распределение интенсивности в изображении точки для различных длин волн света, отличается только смещением в направлении одной координаты, например  $y'$

$$h(y', z', \lambda) = h[y' - f(\lambda), z'] \quad (1)$$

где  $y', z'$  – координаты на поверхности изображения,  $f(\lambda)$  – функция, описывающая зависимость поперечного хроматизма от длины волны  $\lambda$ . Полихроматическая ФРТ может быть найдена как средневзвешенная монохроматических ФРТ

$$h_{\text{поли}}(y', z') = \int_{\lambda_{\text{inf}}}^{\lambda_{\text{sup}}} q(\lambda) h(y', z', \lambda) d\lambda = \int_{\lambda_{\text{inf}}}^{\lambda_{\text{sup}}} q(\lambda) h[y' - f(\lambda), z'] d\lambda \quad (2)$$

где  $q(\lambda)$  – весовая функция – функция относительной спектральной интенсивности, отвечающая условию нормировки  $\int q(\lambda) d\lambda = 1$ ,  $\lambda_{\text{inf}}, \lambda_{\text{sup}}$  – границы спектрального интервала.

Если смещение  $f(\lambda)$ , вызванное хроматизмом, не зависит от величины предмета, то полихроматическую ФРТ можно считать изопланатической. Естественно, что это условие не соблюдается для хроматизма увеличения в параксиальной области центрированных оптических систем, где смещение  $f(\lambda)$  пропорционально величине предмета. Однако во внеосевых зонах часто можно пренебречь изменением хроматизма увеличения в пределах зоны и считать полихроматическую ФРТ изопланатической. Тем более это справедливо для поперечного хроматизма, вызванного кривизной пластин, разверток призм и децентрировкой поверхностей оптической системы. Такой хроматизм практически не зависит от величины предмета.

В работах [1,2] рассмотрено влияние поперечного хроматизма (при условии изопланатизма) в случае линейной зависимости от длины волны, полученные результаты имеют ценность только для неахроматизированных

систем. Для ахроматов (и тем более апохроматов) зависимость  $f(\lambda)$  существенно нелинейна.

Введем в выражение (2) вместо  $\lambda$  безразмерную относительную координату  $\chi$

$$\chi = \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta\lambda} \quad (3)$$

где  $\lambda_0 = (\lambda_{\text{inf}} + \lambda_{\text{sup}})/2$ ,  $\Delta\lambda = (\lambda_{\text{inf}} - \lambda_{\text{sup}})/2$ . В этих координатах спектральный интервал  $(\lambda_{\text{inf}}, \lambda_{\text{sup}})$  становится равным  $(-1, 1)$ , а выражение (2) приобретает вид

$$h_{\text{поли}}(y', z') = \int_{-1}^{+1} q(\chi) h[y' - f(\chi), z'] d\chi$$

Сделаем замену переменных:  $t = y' - f(\chi)$ , тогда  $\chi = f^{-1}(y' - t)$ , где  $f^{-1}$  – обратная функция,

$$d\chi = \left| \frac{\partial f^{-1}}{\partial t} \right| dt = \frac{dt}{|f'_{\chi}(\chi)|}$$

Тогда

$$h_{\text{поли}}(y', z') = \int h(t, z') \sum \left\{ q[f^{-1}(y' - t)] \frac{\partial f^{-1}(y' - t)}{\partial t} \right\} dt = \int h(t, z') g(y' - t) dt = h \otimes g \quad (4)$$

где  $\otimes$  обозначает свертку, а

$$g(y') = \sum q[f^{-1}(y')] \frac{\partial f^{-1}}{\partial y'} = \sum \frac{q[f^{-1}(y')]}{f'_{\chi}[f^{-1}(y')]} \quad (5)$$

Суммирование ведется по всем интервалам однозначности обратной функции  $f^{-1}(t)$ , т. е. по всем интервалам монотонности функции  $f(\chi)$ . Предыдущее выражение представляет полихроматическую ФРТ в рассматриваемом случае как свертку монохроматической ФРТ  $h(y', z')$  с некоторой функцией  $g(y')$ , зависящей только от хроматизма  $f(\chi)$  и весовой функции  $q(\chi)$ , следовательно, в соответствии с теорией изображения [8] влияние поперечного хроматизма на передаточные характеристики можно рассматривать как работу отдельного изображающего «прибора» с ФРТ, имеющей вид  $g(y')$ . Эту функцию можно назвать ФРТ «поперечного хроматизма».

Взяв преобразование Фурье от выражения (4), получим оптическую передаточную функцию (ОПФ) при наличии поперечного хроматизма: полихроматическая

$$ОПФ \equiv D_{\text{поли}}(v_y, v_z) = D_{\text{моно}}(v_y, v_z) D_{\text{хр.}}(v_y), \quad \text{где}$$

$$D_{\text{хр.}} = F[g(y')] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y') \exp(2\pi i v_y y') dy'. \quad D_{\text{моно}}(v_y, v_z) - \text{ монохроматическая}$$

ОПФ,  $D_{xp}(\nu_y)$  – ОПФ поперечного хроматизма,  $\nu_y, \nu_z$  – пространственные частоты.

Подставляя выражение (5) для  $g(y')$  получим

$$D_{xp}(\nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum \left\{ q[f^{-1}(y')] / f'_{\chi} [f^{-1}(y')] \right\} \exp(2\pi i \nu_y y') dy'$$

Строго говоря, в выражении (4) необходимо рассматривать свертку по двум переменным  $y'$  и  $z'$ , тогда функцию  $g(y')$  необходимо дополнить множителем в виде дельта-функции Дирака  $\delta(z')$ .

заменяя переменную  $f^{-1}(y') = \chi$ , получим окончательное выражение для ОПФ поперечного хроматизма

$$D_{xp}(\nu_y) = \int_{-1}^{+1} q(\chi) \exp[2\pi i \nu_y f(\chi)] d\chi \quad (6)$$

Заметим, что это выражение аналогично по форме выражению для геометрического приближения ОПФ [4] с тем отличием, что интегрирование в (6) ведется не по зрачку, а по спектральному интервалу. Кроме того, геометрическая ОПФ соответствует действительности только в области малых пространственных частот  $\nu_y \ll \nu_{lim} = 2A_y / \lambda$ , выражение (6) справедливо при любых частотах вплоть до предельной. Рассмотрим более подробно ФРТ поперечного хроматизма  $g(y')$ . Из (5) вытекает простой графоаналитический метод ее построения по известным функциям  $f(\lambda)$  и  $q(\lambda)$ , показанный на рис.1. Для каждой абсциссы искомой кривой  $g(y')$ , т. е. ординаты  $y'$  графика 1,б, находим все точки пересечения прямой  $y' = y'_i$  с графиком функции хроматизма  $f(\lambda)$ .

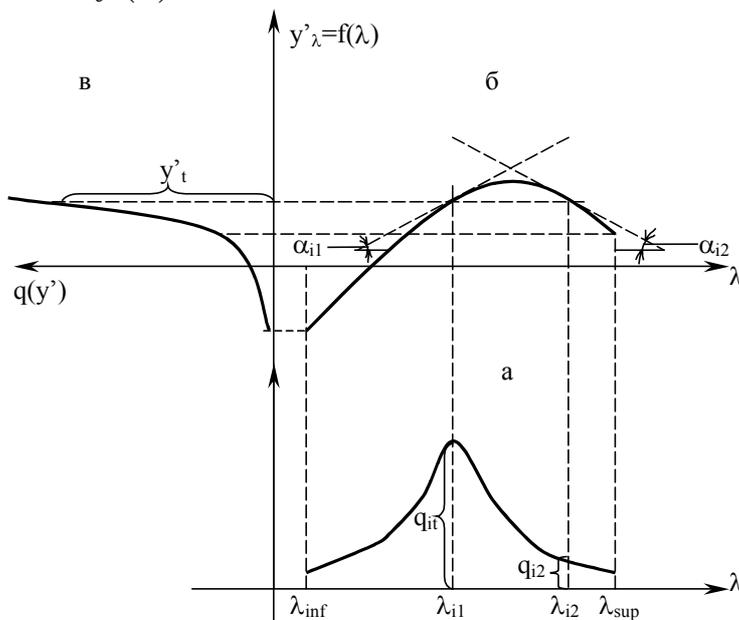


Рис. 1. Графоаналитический метод построения ФРТ поперечного хроматизма. а – весовая функция  $q(\lambda)$  – функция относительной спектральной эффективности, б – функция хроматизма  $f(\lambda)$  – зависимость поперечного смещения от длины волны, в –  $g(y')$  – ФРТ поперечного хроматизма.

В каждой такой точке строим касательную к кривой  $f(\lambda)$ , а также находим ординаты  $q_{ij}$  графика 1, а, соответствующие абсциссам этих точек  $\lambda_{ij}$ . Значение ФРТ (ординату графика 1, в) для данного  $y'_i$  получаем как сумму всех  $q_{ij} = q(\lambda_{ij})$ , деленных на модули тангенса наклона касательных к оси  $\lambda$ .

Если точки пересечения прямой  $y = y'_i$  с кривой  $f(\lambda)$  отсутствуют, то соответствующее значение  $g(y')$  равно нулю. В случае линейной зависимости  $f(\lambda)$ , как нетрудно убедиться,  $g(y')$  есть функция  $q(\lambda)$  в масштабе  $\Delta y' / \Delta \lambda$ , а  $D(v_y)$  есть фурье-образ  $q(\lambda)$  в обратном масштабе.

Часто зависимость поперечного хроматизма от длины волны, т.е. функцию  $f(\chi)$  можно с удовлетворительной точностью аппроксимировать параболой (кроме систем с апохроматической коррекцией) [5]. Представляется интересным исследовать, как зависят передаточные характеристики хроматизма  $g(y')$  и  $D(v_y)$  от вида коррекции, т. е. от формы функции  $f(\chi)$  при одинаковой величине хроматизма.

Итак, пусть  $f(\chi)$  имеет вид

$$f(\chi) = a\chi^2 + b\chi + c \quad (7)$$

Степень коррекции хроматизма (форму кривой) можно характеризовать положением вершины параболы  $\chi_m = -b/2a$ , при этом  $\chi_m = 0$  соответствует полностью ахроматической коррекции, а  $\chi_m = \infty$  полностью неахроматической. Выберем коэффициенты  $a, b, c$  таким образом, чтобы размах функции  $f(\chi)$  в интервале  $\chi \in (-1, 1)$  был бы постоянным и равным  $(-1, 1)$ , т.е. чтобы была постоянной величина хроматизма  $2\Delta y' = 2$ . Очевидно, что при этом мы получим различные формулы для случая  $\chi_m < 1$ , когда вершина лежит внутри интервала  $(-1, 1)$  и размах функции есть разность между ее значением в вершине и при  $\chi = -1$  ( $2\Delta y = f(\chi_m) - f(-1) = 1 - (-1) = 2$ ) и для случая, когда  $\chi_m > 1$ , вершина лежит вне рабочего спектрального интервала  $(-1, 1)$ , размах функции есть разность между ее значениями при  $\chi = 1$  и  $\chi = -1$ :  $2\Delta y = f(1) - f(-1)$  (Рис. 2). После преобразований приходим к функции  $f(\chi)$  следующего вида:

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{(1 + \chi_m)^2} (-2\chi^2 + 4\chi_m\chi + 1 + 2\chi_m - \chi_m^2) & \text{при } \chi_m \leq 1 \\ -\frac{\chi^2}{2\chi_m} + \chi + \frac{1}{2\chi_m} & \text{при } \chi_m > 1 \end{cases} \quad (8)$$

Кривые  $f(\chi)$  для различных  $\chi_m$  приведены на рис. 2.

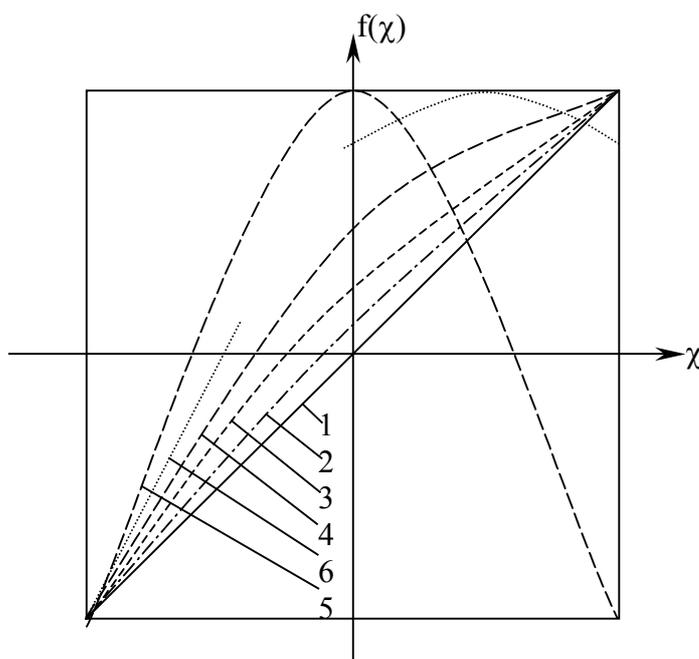


Рис. 2. Графики функции хроматизма  $f(\chi)$  (в безразмерных координатах  $\chi = (\lambda - \lambda_0) / \Delta\lambda$ ) в параболической аппроксимации для различных форм коррекции хроматизма.

Положение вершины: 1 –  $\infty$ , 2 – 4, 3 – 2, 4 – 1, 5 – 0, 6 – 0.5. Графики гауссовой весовой функции обозначены индексом а, прямоугольной функции – индексом б. Кривая  $\chi_m = 0$  – оптимальная форма коррекции для гауссовой весовой функции, кривая  $\chi_m = 0.5$  – оптимальная форма коррекции для прямоугольной весовой функции.

Для различных форм коррекции хроматизма были вычислены функции рассеяния точки и частотно-контрастные характеристики  $T(\nu_y)$  (модуль ОПФ) поперечного хроматизма по формулам (1.5), (1.6) для двух типов весовой функции  $q(\chi)$  [2]. Функция  $q_1(\chi)$  первого типа имеет вид прямоугольника

$$q_1(\chi) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{\chi}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{при } |\chi| \leq 1 \\ 0 & \text{при } |\chi| > 1 \end{cases}$$

и соответствует приемнику с примерно равномерной чувствительностью во всем спектральном интервале.

Функция второго типа имеет вид гауссовой кривой и близка к кривой чувствительности глаза [2]

$$q_2(\chi) = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{\pi}} \exp(-9\chi^2) & \text{при } |\chi| \leq 1 \\ 0 & \text{при } |\chi| > 1 \end{cases}$$

Для функции  $f(\chi)$  в параболической аппроксимации (1.7) выражение (1.5) может быть приведено к более простому виду

$$g(y') = \frac{[q(\chi_1) + q(\chi_2)]}{\sqrt{b^2 + 4a(y'-c)}}$$

где  $\chi_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 + 4a(y'-c)})/2a$  – корни уравнения  $a\chi^2 + b\chi + c = y'$ .

Результаты расчета приведены на рис. 3 и 4.

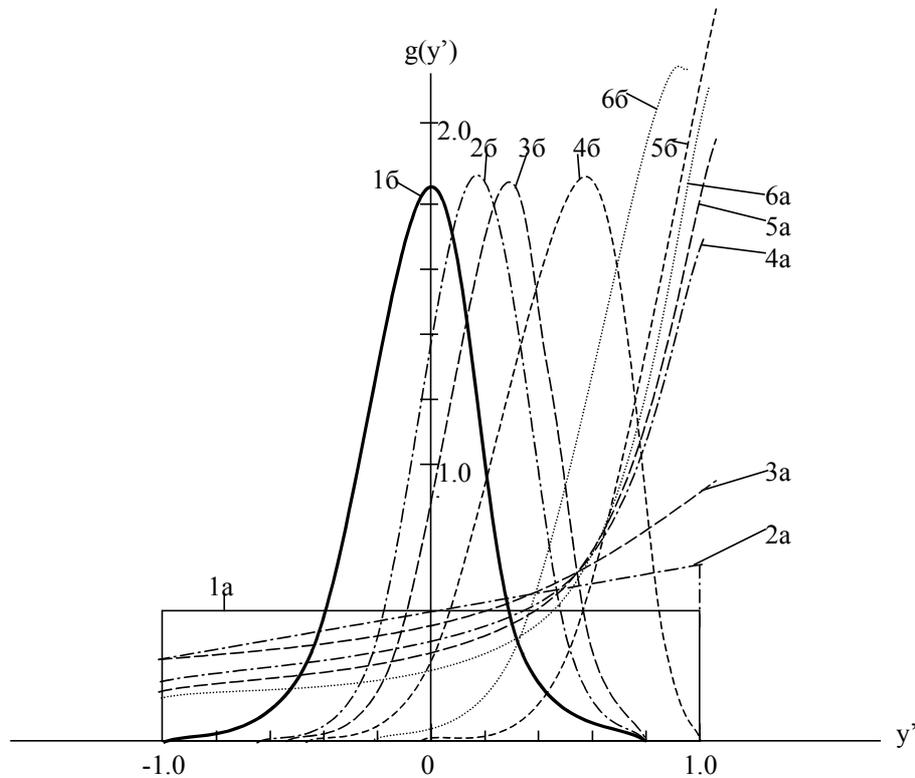


Рис. 3. Графики ФРТ поперечного хроматизма различных форм коррекции хроматизма для гауссовой и прямоугольной весовых функций проведены линиями, аналогичными рис. 2.

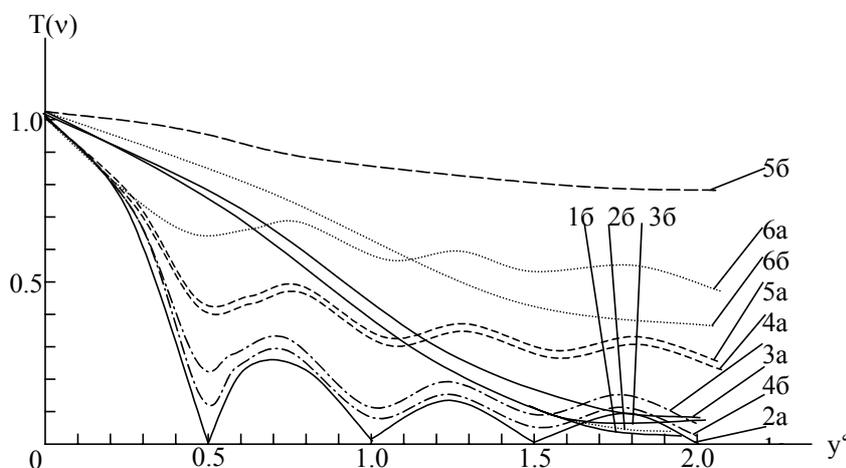


Рис. 4. Графики ЧКХ поперечного хроматизма. Обозначения те же, что и на рис. 2 и 3.

Случай  $\chi_m = \infty$  соответствует линейной функции  $f(\chi)$ . При этом  $q(y')$  подобны функциям  $q(\chi)$ , а  $T(v_y)$  есть модуль фурье-образа  $g(y')$ ; для  $q_1$  это  $\sin c(2\pi v_y)$ , для  $q_2$  это  $\exp(-1.24v_y)$ . Как видно из рисунков, это – наихудший случай; частотно – контрастные характеристики имеют здесь наименьшие значения, а ФРТ – наиболее «плоскую» вершину.

С уменьшением  $\chi_m$ , т. е. с приближением формы коррекции к полностью ахроматической, ЧКХ заметно улучшается, причем интересно отметить, что для весовой функции гауссового типа это улучшение монотонно и наилучшая форма коррекции (наивысшие значения ЧКХ на всех частотах) соответствуют  $\chi_m = 0$ , в то время как для весовой функции прямоугольного типа оптимальная коррекция соответствует  $\chi_m = 0.5$ , а при  $\chi_m = 0$  и 1 передаточные характеристики идентичны.

В заключение авторы приносят благодарность Л. Студеникиной за составление программы и проведение расчетов на ЭВМ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. М.Н. Сокольский. Оптико-механич. промышл. № 2. 1970. 19.
2. С.А. Родионов, М.Н. Сокольский, Л.М. Лапо. Оптико-механич. промышл. № 9. 1973. 15.
3. Л. Папулис. Теория систем и преобразований в оптике. «Мир», 1972.
4. К. Miyamoto. J. Opt. Soc. Am. 48. 1958. 57.
5. А. Красковский. Оптико-механич. промышл. № 7. 1970. 15.