О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДОПУСКОВ НА СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. А. РОДИОНОВ, Н. И. ХЛУСОВА

При расчете допусков на изготовление и сборку оптических систем возникает задача о распределении общего допуска на какую-либо погрешность прибора по отдельным первичным ошибкам, вызывающим эту погрешность, например, поперечный или продольный хроматизм, астигматизм и пр.

Наиболее употребительными являются следующие формулы [1,2]:

для скалярных ошибок

$$\Delta_i = \Delta / \sqrt{m} \tag{1}$$

для векторных ошибок

$$\Delta_i = \sqrt{2} \cdot \Delta / \sqrt{m} \tag{2}$$

где $i = 1,2,\ldots,m$; Δ – общий приборный допуск; Δ_i – допуск на i-ю первичную ошибку; m – количество ошибок. В приведенных формулах предполагается, что влияние всех первичных ошибок одинаково, т. е. существует следующая зависимость между функцией аберрации прибора и отклонениями параметров от номинала

$$Y = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

где Y – случайная величина-аберрация прибора, x_i – случайные величины – первичные ошибки.

Кроме того, формула (1) справедлива только в том случае, если все первичные ошибки распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и если связь допуска с дисперсией одинакова как у общей ошибки, так и у первичных ошибок, т. е.

$$MO(x) = x_i = 0;\ \Delta_i = k\sigma_i;\ \Delta = k\sigma \tag{3}$$

где $\sigma_i = \sqrt{D(x_i)}$, $\sigma = \sqrt{D(Y)}$

а k – коэффициент рассеяния, одинаковый для всех первичных ошибок.

Условие (3) для большинства оптических погрешностей выполняется. Представляет интерес, однако, рассмотреть вопрос о распределении допусков по первичным ошибкам в случае их неодинакового влияния на общую ошибку, т. е. в случае, когда

$$Y = \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \tag{4}$$

(q_i – коэффициенты влияния, в общем случае неравные).

Прежде чем обратиться к решению этой задачи, покажем, что формула (2) справедлива для случая, если в векторных погрешностях x_i учитываются только их модули, но в этом случае векторные ошибки при прочих равных условиях суммируются таких же, как и скалярные.

Пусть в (4) x_i и Y – случайные скалярные величины, удовлетворяющие условиям (3). Тогда

$$D(Y) = \sum q_i^2 D(x_i) \text{ или } \frac{\Delta^2}{k^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^2 \Delta_i^2}{k^2},\ \Delta = \sqrt{\sum q_i^2 \Delta_i^2} \tag{5}$$

Отсюда при $q_i = 1$ следует формула (1). Пусть теперь в (4) x_i и Y – случайные релеевские векторы, параметры которых равны соответственно σ_i и σ. Тогда в соответствии с законом суммирования случайных релеевских векторов [3]

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \tag{6}$$

Если допуск на общую и первичные ошибки Δ и Δ_i и в этом случае одинаково связан с параметрами закона распределения, т. е. $\Delta = k\sigma$ и $\Delta_i = k\sigma_i$, то из (6) следует выражение $\Delta = \sqrt{\sum q_i^2 \Delta_i^2}$, идентичное выражению (5) для скалярных погрешностей. Таким образом, разницы в суммировании скалярных и векторных погрешностей при принятых предположениях нет.

Рассмотрим теперь распределение допусков в случае неравных коэффициентов q_i. В таких случаях обычно включают q_i в первичные ошибки, полагая, что вместо первичной ошибки x_i есть новая ошибка

$$z_i = q_i x_i \tag{7}$$

Тогда для ошибок z_i формула (5) принимает вид (1), т. е.

$\Delta = \sqrt{m}\Delta z_i$ и легко найти $\Delta z_i = \Delta / \sqrt{m}$, а затем в соответствии с (7) имеем

$$\Delta_i = \frac{\Delta}{|q_i|\sqrt{m}} \tag{8}$$

Известно, что использование (8) в случае неодинаковых q_i не является самым рациональным. В самом деле, из выражений (5) следует, что существует бесконечное множество способов распределения допусков Δ_i при соблюдении (5). Отсюда вытекает возможность введения дополнительных условий, накладываемых на Δ_i с целью наиболее рационального их выбора.

Распределение допусков можно считать оптимальным, если оно связано со стоимостью изготовления и сборки изделия. Для решения задачи минимизации затрат необходимо иметь связь затрат с величиной допуска. Применительно к оптическому приборостроению такие данные отсутствуют, однако в этом направлении известны работы [5, 6], относящиеся к машиностроению.

В работе [6] показано, что зависимость стоимости от допуска нелинейна и определяется выражением

$$R = A + \frac{B}{\delta p}$$

Однако по выбору коэффициентов *A, B, p* нет однозначных рекомендаций. Очевидно, вопрос об определении зависимости стоимости от допуска требует дополнительных исследований применительно к конкретному производству, но в качестве первого приближения можно считать, что затраты обратно пропорциональны дисперсиям, т. е. квадратам допусков. Более общий случай соответствует выбору

$$H_i = \frac{C_i}{\Delta_i^{2p}}$$

(H_i – затраты на *i*-ю ошибку, C_i – коэффициент пропорциональности, $p > 0$ – показатель).

Суммарные затраты определяются формулой

$$H = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{\Delta_i^{2p}} \tag{9}$$

Итак, задача сводится к минимизации (9) при условии (5), т. е. к задаче нахождения условного минимума.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{\Delta_i^{2p}} = \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \Delta_i^2 = \Delta^2 \end{cases} \tag{10}$$

Аналогичная задача решена [6] методом неопределенных множителей Лагранжа [4]. При этом предполагается, что связь между допусками на составляющие звенья и замыкающие звенья линейна,

Решение системы (10) сводится к нахождению минимума функции φ :

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i}{\Delta_i^{2p}} + \lambda \left(\sum q_i^2 \Delta_i^2 - \Delta^2 \right) = \min \tag{11}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа. Дифференцируя (11) по Δ_i и λ_i приравнивая производные нулю, получаем систему уравнёний:

$$\begin{cases} -pC_i \Delta_i^{-2(p+1)} + \lambda q_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{m} a_i^2 \Delta_i^2 = \Delta^2 \end{cases}$$

откуда

$$\Delta_i = \frac{\Delta}{\left(\frac{q_i^2}{C_i} \right)^{\frac{1}{2p+1}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left(q_i^{2p} C_i \right)^{\frac{1}{p+1}} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

При однородных по характеру первичных ошибках можно предположить $C_i = 1$. В этом случае, например, для $H_i \sim \frac{1}{\Delta}$ получаем простую формулу:

$$\Delta_i = \frac{\Delta}{\sqrt{|q_i| \sum_{i=1}^{m} |q_i|}} \qquad (12)$$

Как показано в работе [6], частный случай, когда $C_i = 1$, а $p = 0$, соответствует распределению допусков по способу равного влияния. При $p = 0$ выражение (12), как легко убедиться, переходит в (9). В этом случае затраты $H = \frac{1}{\Delta_i^{2p}} = 1$, т. е. постоянны и не зависят от допусков. Таким образом доказано, что способ равного влияния соответствует распределению допусков без учета затрат.

В оптике при рассмотрении только одной из аберраций системы зависимость между аберрацией и допусками на параметры системы также линейна. Однако одна из аберраций не может служить критерием качества системы. Таким критерием может служить, например, средний квадрат деформации волнового фронта, либо сумма квадратов аберраций системы и т. п.

В случае квадратичной зависимости

$$y = \sum_{i=1}^{m} q_i x_i^2 ,$$

где y – оценочная функция, а q_i – коэффициенты пропорциональности. Пусть $z_i = x_i^2$, тогда $y = \sum_{i=1}^{m} q_i z_i$ и

$$MO(y) = \sum_{i=1}^{m} q_i\, MO(z_i) = \sum_{i=1}^{m} q_i\, MO(x_i^2),\ D(y) = \sum_{i=1}^{m} q_i^2 D(x_i^2).$$

Из теории вероятностей [3] известно, что

$$MO(x_i^2) = D(x_i) = \sigma_i^2 ,\ MO(y) = \sum_{i=1}^{m} q_i \sigma_i^2 ,\ D(x_i^2) = 2D^2(x_i),$$

тогда

$$D(y) = \sum_{i=1}^{m} 2 q_i^2 \sigma_i^4$$

Величина y в общем случае распределена не по нормальному закону. Для решения задачи о распределении допусков можно применить неравенство Чебышева [3]:

$$p(Y > [MO(y) + \alpha\sigma]) < \frac{1}{\alpha^2}$$

Однако это неравенство является весьма слабым и приводит к жестким допускам. Кроме того, решение задачи о распределении допусков в этом случае усложняется. При достаточно большом количестве первичных ошибок с близкими характеристиками, в соответствии с центральной предельной теоремой, распределение приближается к нормальному.

Для грубой оценки можно считать, что математическое ожидание y существенно меньше σ_y и его можно принять равным нулю. В этом случае решение задачи о распределении допусков сводится к системе уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{C_i}{\Delta_i^{2p}} = \min \\ \alpha \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} 2 q_i^2 \sigma_i^4} = \Delta \end{cases}$$

Решение найдено методом Лагранжа при $\alpha = 1$ и имеет вид:

$$\Delta_i = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt[3]{q_i} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} q_i^{2/3}}} \qquad (13)$$

В отличие от точной формулы распределения общего допуска по составляющим звеньям, полученной в работе [6], формула (13) хотя и дает приближенное значение допусков, но учитывает квадратичную зависимость оценочной функции от первичных ошибок.

Принятые предположения являются весьма приближенными, но полученное распределение допусков может быть проверено методом статистических испытаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кругер М. Я. Справочник конструктора оптико-механических приборов. М.- Л., 1963
2. Погарев Г.В. Юстировка оптических приборов. «Машиностроение», 1968
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Изд. 4, «Наука», 1969.
4. Бронштейн Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М., «Наука», 1965
5. Дунаев П. Ф. Методика расчетов рациональных допусков. – «Станки и инструменты», 1952, №6
6. Баранов Г. Г. О выборе допусков, обеспечивающих заданную точность механизма и наименьшую стоимость его изготовления. – Труды ин-та машиноведения. 1957, №11