ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ БАЛАНСИРОВКЕ СФЕРИЧЕСКОЙ АБЕРРАЦИИ И ВЫБОРЕ ПЛОСКОСТИ НАИЛУЧШЕЙ УСТАНОВКИ В СИСТЕМАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ЭКРАНИРОВАНИЕМ

В. А, Зверев, С. А. Родионов, М. Н. Сокольский и Н. И. Хлусова

Рассматривается влияние центрального экранирования зрачка на соотношения между различными порядками сферической аберрации, обеспечивающие минимальное значение среднего квадрата деформации волнового фронта для точки на оси центрированных оптических систем. Получены общие соотношения между сферической аберрацией третьего и высшего порядков и дефокусировкой при наличии аберраций любого порядка. Более подробно рассмотрен случай аберраций не выше пятого порядка. Исследовано влияние аберраций и центрального экранирования на структуру изображения точки и частотно-контрастную характеристику при условии оптимальной коррекции.

Вопрос об оптимальной балансировке аберраций различных порядков и выборе плоскости наилучшей установки рассматривался различными авторами для случая сферической аберрации до пятого порядка, комы и др. [1-4]. Несомненный практический интерес представляет исследование влияния центрального экранирования, неизбежного в центрированных зеркальных и зеркально-линзовых системах, на балансировку аберраций.

Рассмотрим случай точки на оси центрированной системы с круглым зрачком, когда имеется только сферическая аберрация и дефокусировка. В этом случае волновая аберрация системы может быть представлена в виде [5]

$$W(\rho) = \omega_{20}\rho^2 + \omega_{40}\rho^4 + ... + \omega_{2n0}\rho^{2n} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{2k0}\rho^{2k}, \qquad (1)$$

где $W(\rho)$ – волновая аберрация как функция относительного радиус-вектора ρ точки на зрачке $(\alpha \le \rho \le 1)$, α – коэффициент центрального экранирования, ω_{20} – коэффициент волновой дефокусировки, ω_{2k0} – коэффициенты волновой сферической аберрации $2k$ – 1-го порядка.

Коэффициенту ω_{20} можно придать любые значения уже в готовой системе, так как он определяется смещением $\Delta S_0'$ плоскости установки от плоскости Гаусса

$$\omega_{20} = -\Delta S_0' \frac{A_0'^2}{2}, \qquad (2)$$

где A_0' – апертура.

Коэффициент ω_{40} сферической аберрации третьего порядка относительно нетрудно изменять при расчете системы в области аберраций третьего порядка. Остальные коэффициенты ω_{2k0} $(k \ge 3)$ сферической аберрации пятого и высших порядков значительно труднее поддаются управлению, их минимально достижимые значения определяются типом системы.

Таким образом, задача балансировки аберраций и выбора плоскости установки формулируется как задача определения значений коэффициентов ω_{20} и ω_{40}, обеспечивающих наилучшее значение некоторого критерия качества, при заданных значениях коэффициентов ω_{2k0} ($k \geq 3$).

В качестве такого критерия для систем с малыми волновыми аберрациями, т. е. для большинства астрономических объективов, удобно принять введенный Марешалем [1] средний квадрат деформации волнового фронта

$$E = \overline{W}^2 - (\overline{W})^2, \tag{3}$$

где

$$\overline{W} = \frac{1}{A}\iint\limits_A W dA,\ \overline{W}^2 = \frac{1}{A}\iint\limits_A W^2 dA \tag{4}$$

усредненные по зрачку значения волновой аберрации и ее квадрата.

Как показал Марешаль, при малых аберрациях величина E пропорциональна уменьшению числа Штреля S, т.е. отношения освещенностей в центре дифракционного пятна рассеяния для данной системы и для системы, свободной от аберраций,

$$S = \frac{h(0)}{h_0(0)} \geq \left(1 - \frac{2\pi^2}{\lambda^2}E\right)^2, \tag{5}$$

где λ – длина волны света. Область значений E, для которой справедливо это выражение, зависит от вида аберраций. По данным Кинга [8], в общем случае число Штреля S должно быть больше 0.5, т. е. $E < \lambda^2/70$. Для рассматриваемого случая сферической аберрации исследования авторов, приведенные ниже, дают $E \leq \lambda^2/50$, т. е. $S > 0.35$.

Наилучшая форма коррекции аберраций должна, следовательно, минимизировать E.

Для случая круглого зрачка единичного радиуса с центральным экранированием α при наличии аберраций вида (1) выражения (4) принимают следующий вид

$$\left.\begin{aligned}
\overline{W} &= \frac{1}{1-\alpha^2}\int\limits_{\alpha^2}^{1} W(\rho^2)d\rho^2 = \frac{1}{1-\alpha^2}\sum_{k=1}^{n}\omega_{2k0}\frac{1-\alpha^{2(k+1)}}{k+1},\\
\overline{W}^2 &= \frac{1}{1-\alpha^2}\int\limits_{\alpha^2}^{1} W^2(\rho^2)d\rho^2 = \frac{1}{1-\alpha^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{2k0}\omega_{2j0}\frac{1-\alpha^2(k+j+1)}{k+j+1}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (3), получим

$$E = \frac{1}{1-\alpha^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{2k0}\omega_{2j0}\left\{\frac{1-\alpha^{2(k+j+1)}}{k+j+1} - \frac{[1-\alpha^{2(k+1)}][1-\alpha^{2(j+1)}]}{(1-\alpha^2)(k+1)(j+1)}\right\}. \tag{7}$$

Таким образом, E представляет собой квадратичную форму от коэффициентов ω_{2k0}. Для решения поставленной задачи удобно выделить в предыдущем выражении члены, содержащие коэффициенты ω_{20} и ω_{40}. После некоторых преобразований получим

$$E = \frac{(1-\alpha^2)^2}{12}(\omega_{20}^2 E_{22} + \omega_{40}^2 E_{44} + 2\omega_{20}\omega_{40}E_{24} + 2\omega_{20}E_{20} + 2\omega_{40}E_{40} + E_{00}), \tag{8}$$

где коэффициенты E_{ij} - имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&E_{22} = 1,\\
&E_{44} = \frac{16}{15}\left[(1+\alpha^2)^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right],\\
&E_{24} = 1+\alpha^2,\\
&E_{20} = \sum_{k=3}^{n}\omega_{2k0}\frac{6k}{(k+1)(k+2)}\sum_{m=0}^{k-1}\left[1+\frac{m(k-m-1)}{k}\right]\alpha^{2m},\\
&E_{40} = \sum_{k=3}^{n}\omega_{2k0}\frac{8k}{(k+1)(k+3)}\sum_{m=0}^{k}\left[1+\frac{3m(k-m)}{2k}\right]\alpha^{2m},\\
&E_{00} = \sum_{k=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}\omega_{2k0}\omega_{2j0}\frac{12}{(k+1)(j+1)(k+j+1)(1-\alpha^2)^2}\times\\
&\times\left\{(k+1)(j+1)\sum_{m=0}^{k+j}\alpha^{2m} - (k+j+1)\sum_{m=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}\alpha^{(2m+i)}\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Дифференцируя (8) по ω_{20} и ω_{40}, легко найти оптимальные их значения, соответствующие минимуму E,

$$\omega_{20опт.} = -(\omega_{40}E_{24} + E_{20}), \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{40опт.} &= \frac{E_{40} - E_{24}E_{20}}{E_{44} - E_{24}^2} = \frac{15}{(1-\alpha^2)^2}\sum_{k=3}^{n}\omega_{2k0}\frac{2k(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}\times\\
&\times\left|\sum_{m=0}^{k}\left[1-\frac{6m(k-m)}{k(k-1)}\right]\alpha^{2m}.\right.
\end{aligned} \tag{11}$$

Выражение (11) определяет оптимальное соотношение между сферической аберрацией третьего и высшего порядков, а выражение (10) – оптимальную дефокусировку (смещение плоскости установки) в общем случае наличия аберрации $2n$–1-го порядка и центрального экранирования α.

Часто можно ограничиться рассмотрением аберраций не выше пятого порядка, т. е. при n=3. Выражение для оптимальной дефокусировки в этом случае принимает вид

$$\omega_{20\,опт.} = -\left\{\omega_{40}(1+\alpha^2) + \frac{9}{10}\omega_{60}\left[(1+\alpha^2) - \frac{2}{3}\alpha^2\right]\right\}. \tag{12}$$

Подставляя $\omega_{20\,опт.}$ в (8), получаем после преобразований выражение для E в плоскости оптимальной установки

$$E_{\min} = \frac{(1-\alpha^2)^4}{180}\left\{[\omega_{40} + 1.5(1+\alpha^2)\omega_{60}]^2 + \frac{9}{140}\omega_{60}^2(1-\alpha^2)^2\right\}. \tag{13}$$

Обозначив $\beta_{46} = -\omega_{40}/\omega_{60}$, запишем

$$E_{\min} = \frac{(1-\alpha^2)^4}{180}\omega_{60}^2\left\{[\beta_{46} - 1.5(1+\alpha^2)]^2 + \frac{9}{140}(1-\alpha^2)^2\right\}. \tag{14}$$

Оптимальное соотношение β_{46} между третьим и пятым порядками сферической аберрации определится из условия равенства выражения в квадратных скобках нулю, откуда

$$\beta_{46\,опт.} = 1.5(1+\alpha^2). \tag{15}$$

При этом

$$E_{\min} = \frac{(1-\alpha^2)^6}{180}\frac{9}{140}\omega_{60}^2 \tag{16}$$

и

$$\omega_{20\,опт.} = 0.6[(1+\alpha^2)^2 + \alpha^2]\omega_{60}. \tag{17}$$

При отсутствии центрального экранирования, т. е. при α=0, формулы (14)-(17) переходят в известные выражения [2, 3].

Выражения (14)-(17) показывают, что при наличии центрального экранирования оптимальное соотношение между сферическими аберрациями третьего и пятого порядка изменяется пропорционально $(1+\alpha^2)$, а между дефокусировкой и аберрацией пятого порядка изменяется пропорционально $[(1+\alpha^2)^2 + \alpha^2]$, при этом остаточная величина E уменьшается пропорционально шестой степени $(1-\alpha^2)$ – отношения неэкранированной площади зрачка к площади зрачка в отсутствие экрана.

Рассмотрим картину продольных аберраций для случая оптимальной балансировки. Для продольной сферической аберрации получим

$$\Delta S'(\rho) = \frac{1}{A_0'^2}\frac{1}{\rho}\frac{\partial W(\rho)}{\partial \rho} = \frac{6}{A_0'^2}\omega_{60}\rho^2[\rho^2 - (1+\alpha^2)]. \tag{18}$$

Приравнивая предыдущее выражение нулю, находим значение $\rho=\rho_0$, для которого исправлена сферическая аберрация,

$$\rho_0 = \sqrt{1+\alpha^2}\,. \tag{19}$$

Таким образом, исправление сферической аберрации должно достигаться за пределами зрачка в точке $\rho = \sqrt{1+\alpha^2}$, а на краю зрачка при ρ=1 сферическая аберрация должна быть недоисправлена.

Дифференцируя (18) по ρ и приравнивая производную нулю, находим значение $\rho=\rho_{\max}$, при котором продольная аберрация максимальна

$$\rho_{\max} = \sqrt{0.5(1+\alpha^2)} = 0.707\sqrt{1+\alpha^2} = 0.707\rho_0 . \tag{20}$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha < \rho_{\max} < 1$ при любых $\alpha < 1$, следовательно, максимум продольной аберрации при оптимальной коррекции всегда лежит в пределах неэкранированной части зрачка. Кроме того, значения продольной сферической аберрации на границах неэкранированной части, т. е. при $\rho=\alpha$ и ρ=1 равны

$$\Delta S_1' = \Delta S_1'(1) = \Delta S_1'(\alpha) = -\frac{6}{A_0'^2}\omega_{60}\alpha^2 . \tag{21}$$

Подставляя $\rho=\rho_{\max}$ в (18), находим максимальную величину продольной аберрации

$$\Delta S_{\max}' = -\frac{1.5}{A_0'^2}\omega_{60}(1+\alpha^2)^2 \tag{22}$$

и, сравнив с $\Delta S_1'$, находим стрелку прогиба кривой сферической аберрации в пределах неэкранированной части зрачка

$$\Delta S_2' = \Delta S_{\max}' - \Delta S'_1 = -\frac{1{,}5}{A_0'^2}\omega_{60}(1-\alpha^2)^2 . \tag{23}$$

Из (2), (17), (21) и (22) получаем положение плоскости наилучшей установки $\Delta S_0'$

$$\frac{\Delta S_0' - \Delta S_1'}{\Delta S_{\max}' - \Delta S_1'} = 0.8 \text{ (независимо от } \alpha\text{)}. \tag{24}$$

Следовательно, коррекцию сферической аберрации нужно производить таким образом, чтобы ее значения на границах неэкранированной части зрачка были бы равны, а максимум лежал бы внутри неэкранированной части (в координатах ρ^2 – посередине), а затем поместить плоскость установки в точку, соответствующую 4/5 стрелки прогиба кривой сферической аберрации в пределах открытой части зрачка. Иллюстрация показана на рис. 1.

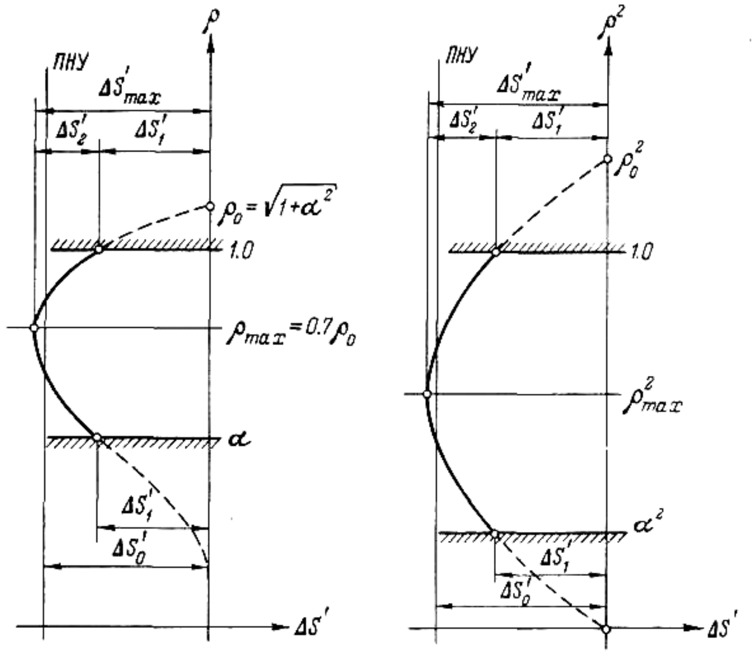

Рис. 1. Продольная сферическая аберрация и положение плоскости наилучшей установки (ПНУ) при оптимальной коррекции на минимум в случае центрального экранирования α.

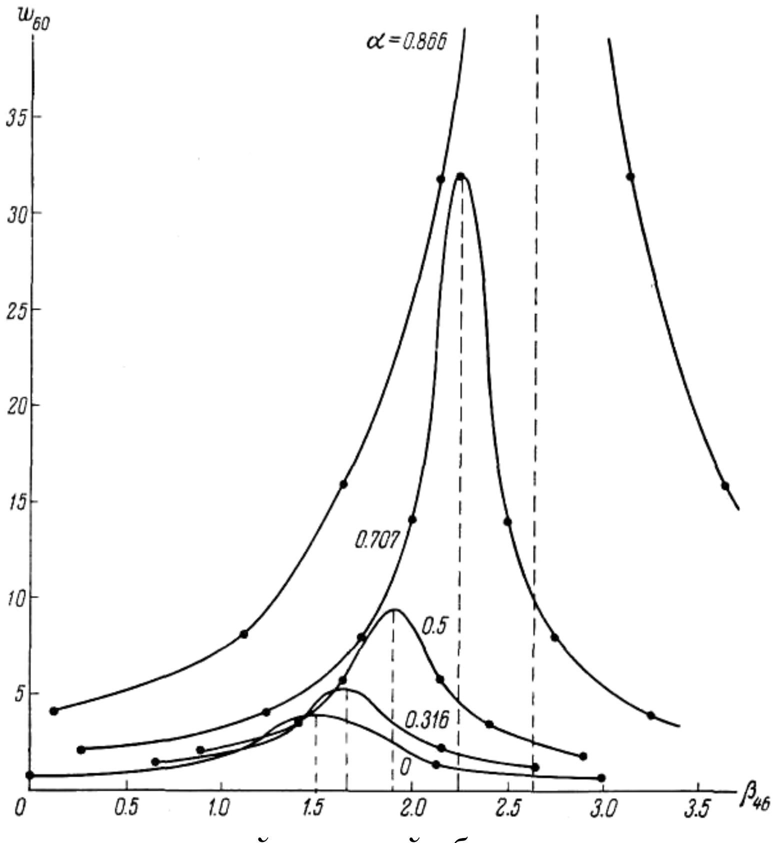

Рис. 2. Зависимость остаточной волновой аберрации пятого порядка ω_{60}, обеспечивающей марешалевский допуск $\lambda^2/180$, от формы коррекции $\beta_{46} = -\omega_{40}/\omega_{60}$ при различных величинах центрального экранирования α, при оптимальном выборе плоскости установки.

Рассмотрим, как зависит допускаемая остаточная сферическая аберрация от центрального экранирования. Если принять, что уменьшение числа Штреля из-за аберраций не должно превышать 20%, то допустимая величина E определяется марешалевским допуском $\lambda^2/180$ [1]. Приравнивая $E_{\min}$ из выражения (14) указанной величине, получаем

$$|\omega_{60}| < \frac{4\lambda}{(1-\alpha^2)^3\sqrt{1+\left[\frac{4(\beta_{46}-\beta_{46опт.})}{1-\alpha^2}\right]^2}} \tag{25}$$

Зависимость, описываемая формулой (25), для различных значений α показана на рис. 2.

Для допускаемой продольной сферической аберрации в пределах открытой части зрачка из (22) и (25) получаем

$$|\Delta S_2'| < \frac{6\lambda}{A_0'^2(1-\alpha^2)}. \tag{26}$$

Для практического применения критерия E представляют интерес пределы его адекватности уменьшению числа Штреля и другим критериям качества изображения.

Для исследования этого вопроса, а также влияния сферической аберрации на структуру изображения в случае центрального экранирования были произведены на ЭВМ вычисления распределения интенсивности в дифракционном изображении точки $h(r)$ и частотно-контрастных характеристик (ЧКХ) $T(v)$ для различных комбинаций коэффициентов ω_{2k0}.

Вычисление $h(r)$ производилось в соответствии с формулой [6]

$$h(r) = C^2 + S^2;$$
$$\begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\alpha^2}\int \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}\left[\frac{2\pi}{\lambda}W(\rho^2)\right]J_0(2\pi\rho r)d\rho^2, \tag{27}$$

где J_0 – бесселева функция нулевого порядка первого рода, r – радиус-вектор на поверхности изображения, выраженный в оптических единицах λ / A_0'.

Интегрирование в (27) производилось по квадратурам Гаусса с четырьмя узлами на каждую полуосцилляцию подынтегральной функции. Погрешность вычисленных значений $h(r)$ не превышала 10^{-4}.

ЧКХ вычислялась по формуле автокорреляции [3], методом, аналогичным описанному Макдональдом [7], с количеством узлов интегрирования 6×6. Погрешность результатов не превышала $5\cdot10^{-4}$.

Анализ результатов расчета показал, что минимум E совпадает с максимумом числа Штреля S и с максимумом ЧКХ на половине предельной частоты для любых комбинаций коэффициентов, если E не превосходит $\lambda^2/50$. Таким образом, как следует из (16), оптимальная коррекция на минимум среднего квадрата деформации волнового фронта E по формулам (15), (17), (21), (24) сохраняет смысл при величинах остаточной волновой аберрации пятого порядка ω_{60}, удовлетворяющей условию $\omega_{60} < 8\lambda/(1-\alpha^2)^3$.

Влияние аберраций и центрального экранирования на структуру изображения точки и на ЧКХ для различных E и α при условии оптимальной коррекции показано на рис. 3, 4.

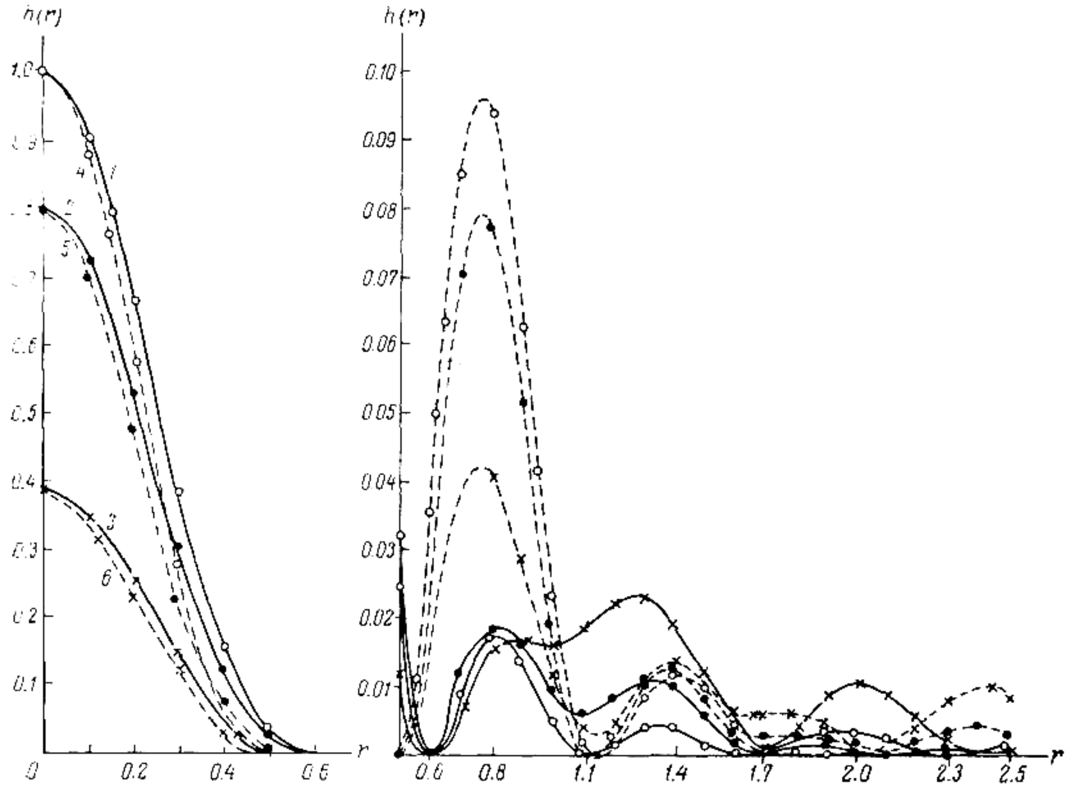

Рис. 3. Кривые распределения интенсивности в дифракционном изображении точки $h(r)$ при различных значениях коэффициента центрального экранирования и различных аберрациях (r – в оптических единицах).

1 – $\alpha = 0$, $E = 0$ ($\omega_{20} = 0$, $\omega_{40} = 0$, $\omega_{60} = 0$) (*Диск Эри*);

2 – $\alpha = 0$, $E = \lambda^2/180$ ($\omega_{20} = 2.4$, $\omega_{40} = 6.0$, $\omega_{60} = 4.0$);

3 – $\alpha = 0$, $E = \lambda^2/45$ ($\omega_{20} = 4.8$, $\omega_{40} = -12.0$, $\omega_{60} = 8.0$);

4 – $\alpha = 0.5$, $E = 0$ ($\omega_{20} = 0$, $\omega_{40} = 0$, $\omega_{60} = 0$);

5 – $\alpha = 0.5$, $E = \lambda^2/180$ ($\omega_{20} = 10.33$, $\omega_{40} = -17.81$, $\omega_{60} = 9.5$);

6 – $\alpha = 0.5$, $E = \lambda^2/45$ ($\omega_{20} = 20.66$, $\omega_{40} = -35.62$, $\omega_{60} = 19$).

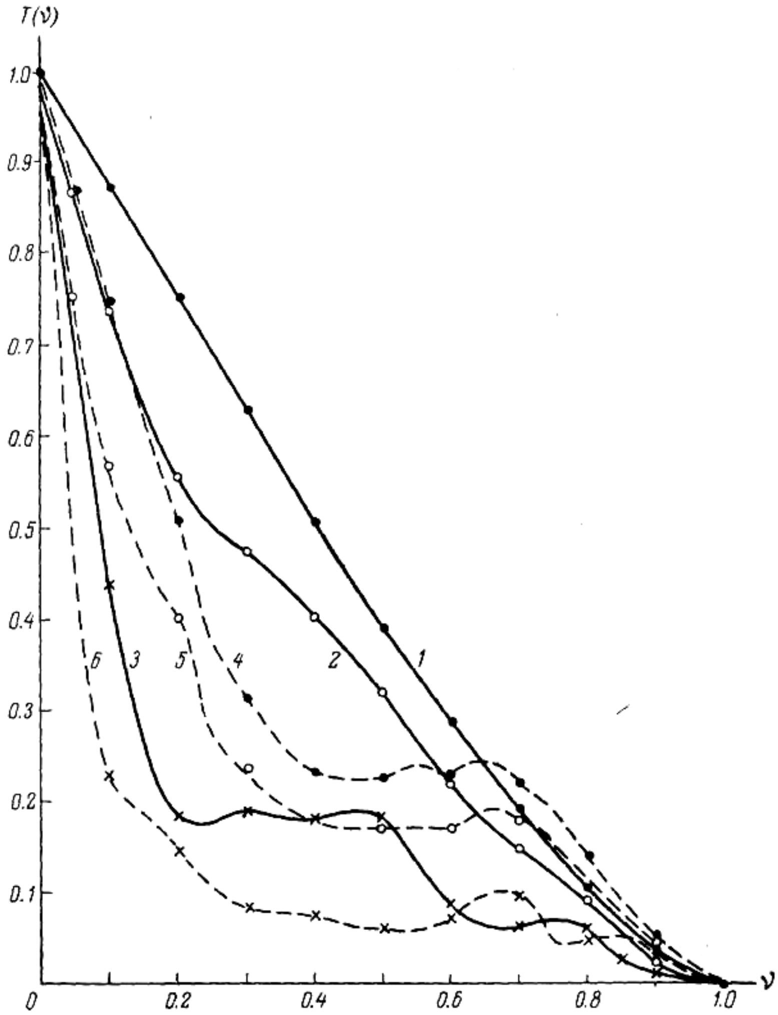

Рис. 4. Частотно-контрастные характеристики T (ν) для шести случаев, указанных на рис. 3.
Пространственные частоты ν – в долях предельной частоты, равной $2A_0' / \lambda$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. Изд. «Мир», М., 1964.
2. Э.О. Нейл. Введение в статистическую оптику. Изд. «Мир», М., 1966.
3. H. H. Hopkins. Optica Acta, 13, 343, 1966.
4. А. Ленский. Опт. и спектр., 25, 129, 1968.
5. H.H. Hopkins. Wave Theory of Aberrations. Oxford. Clarendon Press, 1949.
6. Г.Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. Изд. «Машиностроение», Л., 1969.
7. J. Macdonald. Optica Acta, 18, 269, 1971.
8. W.B. King. J. Opt. Soc. Am., 58, 655, 1968.