

## ОБ ОЦЕНКЕ ВЛИЯНИЯ МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ВОЛНОВОГО ФРОНТА НА КАЧЕСТВО ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В. А. Зверев, С. А. Родионов и М. Н. Сокольский

Исследовано влияние деформаций волнового фронта на качество оптического изображения. Выведены формулы для расчета распределения освещенности в изображении точки в случае местных деформаций волнового фронта. Формулы приведены к виду, удобному для расчетов на ЦВМ. Произведены расчеты допусков на величины местных деформаций исходя из критерия «числа Штреля».

Местные деформации волнового фронта, т. е. отклонения выходящего из оптической системы волнового фронта от сферы сравнения, локализованные на отдельных участках зрачка, могут быть вызваны различными причинами, например местными ошибками изготовления поверхностей оптических деталей, неоднородностью оптических материалов и др.

Значительный практический интерес представляет исследование влияния местных деформаций волнового фронта на структуру оптического изображения и установление допустимых величин этих деформаций. Этот вопрос особенно остро стоит в крупногабаритных оптических системах, например в астрооптике, где местные ошибки почти неизбежны, а требования к качеству изображения достаточно высоки.

Рассмотрим влияние местных деформаций волнового фронта на структуру дифракционного изображения точки.

Будем предполагать, что, за исключением местных деформаций, волновая aberrация отсутствует, а зрачок системы имеет форму круга с круглым центральным экраном (рис. 1).

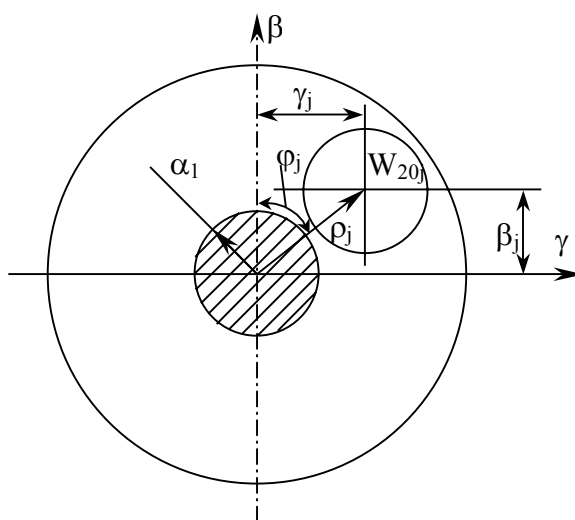


Рис. 1. Расположение местной деформации волнового фронта на зрачке.

Такая модель, несмотря на ее простоту, вполне пригодна для рассмотрения изображения осевой точки в хорошо скорректированных объективах, например астрономических, зеркальных и зеркально-линзовых объективах.

На рис. 1  $\beta, \gamma$  – нормированные канонические координаты на зрачке [1]

$$\beta = \frac{Y}{A_y}, \quad \gamma = \frac{Z}{A_z}$$

где  $Y, Z$  – действительные координаты на зрачке,  $A_y, A_z$  – соответствующие апертуры. Для точки на оси  $A_y = A_z = A_0$ .

В координатах  $\beta, \gamma$  зрачок имеет форму единичного круга с круглым центральным экраном относительного радиуса  $\alpha$ .

Пусть в пределах зрачка имеется  $m$  неперекрывающихся друг на друга зон с местными деформациями волнового фронта.

Для упрощения анализа будем считать, что каждая  $j$ -я зона также представляет собой круг относительного радиуса  $\alpha_j$ , с координатами центра  $\beta_j, \gamma_j$  и что отклонение волнового фронта от сферы сравнения в пределах каждой зоны симметрично относительно ее центра и имеет вид параболоида вращения

$$W_j(\beta, \gamma) = \begin{cases} W_{20j}(u_j - 1) & \text{в зоне} \\ 0 & \text{вне зоны} \end{cases} \quad (1)$$

где  $u_j = \rho_j^2 = [(\beta - \beta_j)^2 + (\gamma - \gamma_j)^2] / \alpha_j^2$ , а  $W_{20j}$  – величина деформации волнового фронта в центре зоны, выраженная в длинах волн света.

Распределение освещенности  $E(\eta, \xi)$  в дифракционном изображении точки может быть найдено как квадрат модуля комплексной амплитуды  $\Psi(\eta, \xi)$ , которая в свою очередь есть преобразование Фурье функции зрачка  $f(\beta, \gamma)$  [2]

$$E(\eta, \xi) = |\Psi(\eta, \xi)|^2 = \Psi(\eta, \xi) \Psi^*(\eta, \xi) \quad (2)$$

$$\Psi(\eta, \xi) = F[f(\beta, \gamma)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta, \gamma) \exp[2\pi i(\beta\eta + \gamma\xi)] d\beta d\gamma \quad (3)$$

где  $\eta, \xi$  – приведенные координаты в плоскости изображения, выраженные в длинах волн, деленных на апертуру:  $\eta = (y/\lambda)A_y$ ,  $\xi = (z/\lambda)A_z$ , или для точки на оси:  $\eta = (y/\lambda)A_0$ ,  $\xi = (z/\lambda)A_0$ .

Функция зрачка для рассматриваемого случая представляет собой сумму нескольких функций

$$f(\beta, \gamma) = f_0(\beta, \gamma) + \sum_j^m [f_j(\beta, \gamma) - f_{\alpha_j}(\beta, \gamma)] \quad (4)$$

где  $f_0(\beta, \gamma) = \text{circ}(\rho)$  – функция незатененного безаберрационного зрачка единичного радиуса,  $f_{\alpha}(\beta, \gamma) = \text{circ}(\rho/\alpha)$  – функция центрального экрана,

$f_j(\beta, \gamma) = \text{circ}(u_j)W_{20}(u_j - 1)$  – функция  $j$ -й зоны с деформацией волнового фронта,  $f_{эj}(\beta, \gamma) = \text{circ}(u_j)$  – функция экрана, помещенного на месте  $j$ -й зоны.

В предыдущих выражениях  $\rho = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ ,  $\text{circ}(\rho)$  – так называемая функция «круг», определяемая следующим образом [3]:

$$\text{circ}(\beta^2 + \gamma^2) = \text{circ}(\rho^2) = \begin{cases} 1 & \rho \leq 1 \\ 0 & \rho > 1 \end{cases}$$

При подстановке (4) в (3) и (2) функцию  $\Psi(\eta, \xi)$  удобно выразить в полярных координатах  $\Psi(r, \theta)$ , где  $r$  и  $\theta$  связаны с  $\eta, \xi$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r \cos \theta \\ \xi &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пользуясь свойствами преобразования Фурье [3], из (4) и (3) получим следующее выражение для комплексной амплитуды  $\Psi(r, \theta)$ :

$$\psi(r, \theta) = \pi \left\{ \begin{aligned} &\frac{2J_1(2\pi r)}{2\pi r} - \alpha^2 \frac{2J_1(2\pi r \alpha)}{2\pi r \alpha} + \sum_j^m \alpha_j^2 \exp[2\pi i r \rho_j \cos(\theta - \varphi_j)] \times \\ &\times 2 \left[ \int_0^1 \rho_j \exp[2\pi i W_{20j}(\rho_j^2 - 1)] J_0(2\pi \rho_j r \alpha_j) d\rho_j - \frac{2J_1(2\pi r \alpha_j)}{2\pi r \alpha_j} \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  – бесселевы функции 1-го рода, 0-го и 1-го порядков,  $\rho_j$  и  $\varphi_j$  – полярные координаты центра  $j$ -й зоны

$$\beta_j = \rho_j \cos \varphi_j, \quad \gamma_j = \rho_j \sin \varphi_j$$

Нормируем  $\Psi(r, \theta)$  таким образом, чтобы в отсутствие каких-либо местных деформаций амплитуда в центре была бы равна единице. Подставляя в (6)  $W_{20j} = 0, r = 0$  получим

$$\psi_0(0) = \pi(1 - \alpha^2) \quad (7)$$

Разделив затем (6) на (7), сделав в интеграле замену  $u_j = \rho_j^2$ , получим окончательное выражение для нормированной амплитуды

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ \frac{2J_1(2\pi r)}{2\pi r} - \alpha^2 \frac{2J_1(2\pi r \alpha)}{2\pi r \alpha} + \right. \\ &+ \sum_j^m 2\alpha_j^2 \exp[2\pi i r \rho_j \cos(\theta - \varphi_j)] \exp[-2\pi i W_{20j}] \times \\ &\times \left. \left[ \int_0^1 \exp[2\pi i W_{20j} u_j] J_0(2\pi \sqrt{u_j} r \alpha_j) du_j - \frac{2J_1(2\pi r \alpha_j)}{2\pi r \alpha_j} \right] \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

Для практических вычислений комплексные выражения (8) и (2) необходимо привести к вещественному виду. Выполнив очевидные преобразования, получим

$$E(r, \theta) = \psi_{\text{Re}}^2(r, \theta) + \psi_{\text{Im}}^2(r, \theta) \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \psi_{\text{Re}}(r, \theta) &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \left\{ \frac{2J_1(2\pi r)}{2\pi r} - \alpha^2 \frac{2J_1(2\pi r \alpha)}{2\pi r \alpha} + \sum_j^m [\alpha_j^2 c_{1j} [c_{2j} C_j + \right. \\ &+ s_{2j} S_j - \frac{2J_1(2\pi r \alpha_j)}{2\pi r \alpha_j}] - s_{1j} (c_{2j} S_j - s_{2j} C_j) \left. \right\}; \\ \psi_{\text{Im}}(r, \theta) &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \sum_j^m \left\{ \alpha_j^2 C_1 \left[ c_{2j} C_j + s_{2j} S_j - \frac{2J_1(2\pi r \alpha_j)}{2\pi r \alpha_j} \right] + \right. \\ &+ C_1 [c_{2j} S_j - s_{2j} C_j] \left. \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{1j} &= \cos[2\pi r \rho_j \cos(\theta - \varphi_j)], \\ s_{1j} &= \sin[2\pi r \rho_j \cos(\theta - \varphi_j)], \\ c_{2j} &= \cos(2\pi W_{20j}), \\ s_{2j} &= \sin(2\pi W_{20j}), \\ C_j &= \int_0^1 \cos(2\pi W_{20j} u_j) J_0(2\pi r \sqrt{u_j} \alpha_j) du_j, \\ S_j &= \int_0^1 \sin(2\pi W_{20j} u_j) J_0(2\pi r \sqrt{u_j} \alpha_j) du_j. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Формулы (9), (10) и (11) легко программируются для ЦВМ. Интегралы  $C_j, S_j$  содержащиеся в них, могут быть вычислены при помощи квадратурных формул. Удобнее всего пользоваться квадратурами Гаусса, которые требуют минимального количества узлов по сравнению с другими.

Анализ формул (9), (10), (11) показывает, что в любом случае функция  $E(r, \theta)$  распределения освещенности симметрична относительно координатных осей  $\eta$  и  $\xi$ , следовательно, достаточно вычислить ее значения в одном квадранте для значений азимута  $\theta$  от 0 до  $90^\circ$ .

На рис. 2 представлена картина распределения освещенности для  $\alpha_1 = 0.5, \rho_1 = 0.75, W_{20} = 0.5\lambda$ .

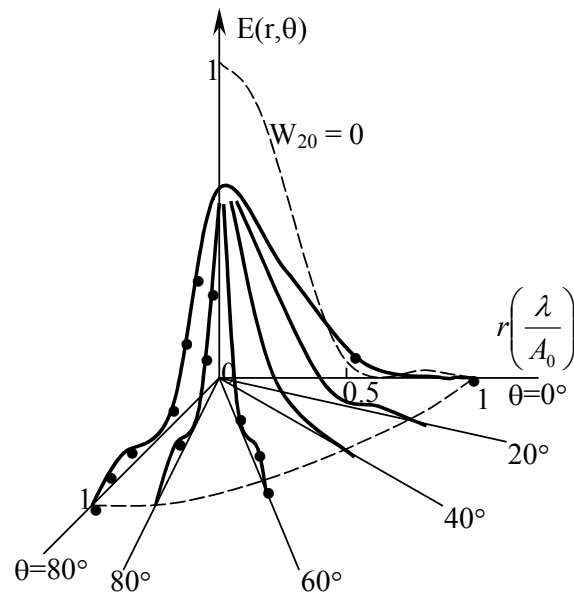


Рис. 2. Распределение освещенности в изображении точки при

$$\alpha_1 = 0.5, \rho_1 = 0.75, W_{20} = 0.5\lambda$$

На рис. 3 показано изменение распределения освещенности для двух значений азимута  $0$  и  $90^\circ$  в зависимости от размера зоны деформации. Координата центра зоны принимается равной  $1 - \alpha_1, \alpha_1 = 0.5, 0.25; W_{20} = 1\lambda$ .

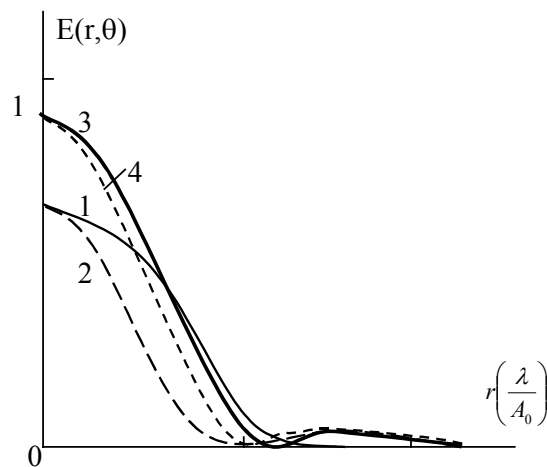


Рис. 3. Распределение освещенности в изображении точки в зависимости от размера зоны деформации. 1:  $\theta = 0^\circ, \alpha_1 = 0.5$ ; 2:  $\theta = 90^\circ, \alpha_1 = 0.5$ ;

$$3: \theta = 0^\circ, \alpha_1 = 0.25; 4: \theta = 90^\circ, \alpha_1 = 0.25.$$

В заключение рассмотрен вопрос о допустимости тех или иных местных деформаций. Для этого необходимо принять какой-либо критерий качества изображения. Для хорошо скорректированных систем с успехом употребляется в качестве критерия так называемое «число Штреля» (или «определяющая яркость»), равное отношению освещенности в центре дифракционной картины при наличии aberrаций к таковой при отсутствии их [4]. Так как в выражении (8)  $\Psi(r, \theta)$  уже нормирована, то для нашего случая число Штреля  $S$  непосредственно равно освещенности в центре дифракционного пятна

$$S = E(0) = |\psi(0)|^2$$

Так как для случая  $r = 0$  интегралы в (8) выражаются в квадратурах, для  $S$  может быть получено довольно несложное аналитическое выражение. Особенно простые формулы получаются в простейшем случае одной местной деформации и отсутствие центрального экранирования, т. е. для  $\alpha = 0, m = 1$ .

Подставляя в (8)  $\alpha = 0, m = 1, r = 0$ , получим

$$\psi(0) = 1 + \alpha_1^2 \left[ \exp(-2\pi i W_{20}) \int_0^1 \exp(2\pi i W_{20} u) du - 1 \right]$$

Замечая, что

$$\int_0^1 \exp(2\pi i W_{20} u) du = \exp(\pi i W_{20}) \operatorname{sin} c(\pi W_{20})$$

где  $\operatorname{sin} c(x) = \sin x/x$ , после некоторых преобразований получим

$$S = 1 - 2\alpha_1^2 [1 - \operatorname{sin} c(2\pi W_{20})] + \alpha_1^4 [1 + \operatorname{sin} c^2(\pi W_{20}) - 2 \operatorname{sin} c(2\pi W_{20})] \quad (12)$$

или

$$S = \{1 - 2\alpha_1^2 [1 - \operatorname{sin} c(2\pi W_{20})]\}^2 + \alpha_1^4 [\operatorname{sin} c^2(\pi W_{20}) - \operatorname{sin} c^2(2\pi W_{20})] \quad (13)$$

Для небольших размеров зоны местной деформации,  $\alpha_1 < 0.4$ , третьим членом в выражении (12) можно пренебречь

$$S \cong 1 - 2\alpha_1^2 [1 - \operatorname{sin} c(2\pi W_{20})] \quad (14)$$

Рассматривая случай  $\alpha_1 = 1$ , приходим к деформации, занимающей весь зрачок, т. е. получаем формулу зависимости числа Штреля идеальной системы от расфокусировки, выраженной в волновой мере,

$$S = \operatorname{sin} c^2(\pi W_{20}) \quad (15)$$

Интересно отметить, что в выражения (12) – (14) не входят координаты центра зоны деформации, следовательно, число Штреля не зависит от положения местной деформации, а только от ее размеров и величины деформации волнового фронта.

Полагая, что изменение числа Штреля на 0.2 от единицы вполне допустимо и не приводит к сколько-нибудь заметному ухудшению качества изображения [4,5], можно определить максимальный размер зоны деформации, при котором ее величина  $W_{20}$  может быть большой. Из выражения (14) получаем

$$2\alpha_1^2 [1 - \operatorname{sin} c(2\pi W_{20})] < 0.2$$

Так как  $1 - \operatorname{sin} c(2\pi W_{20}) < 1$ , то при  $\alpha_1 < 0.3$ , т. е. в случае, если размер зоны деформации меньше 1/3 диаметра зрачка, величина деформации может быть достаточно большей, до нескольких длин волн, при этом число Штреля остается  $\geq 0.8$ .

На рис.4 приведены зависимости числа Штреля  $S$  от величины деформации  $W_{20}$  при различных размерах зоны деформации  $\alpha_1$ , рассчитанные по формулам (12) – (14).

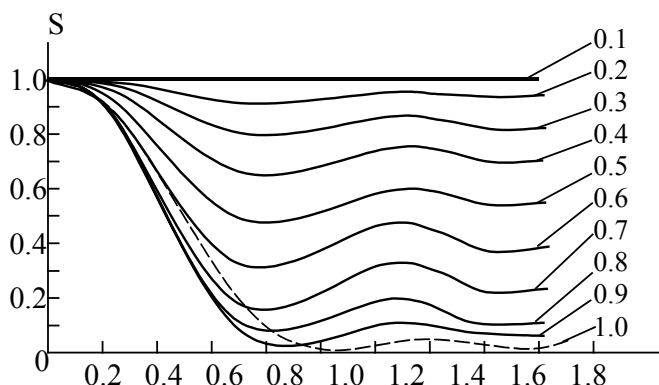


Рис. 4. Зависимость числа Штреля  $S$  от величины деформации  $W_{20}$  при различных размерах зоны деформации ( $\alpha_1 = 0.1 \div 1$ ).

Пользуясь этим рисунком или выражением (13), легко оценить допустимую величину деформации в любом конкретном случае. Так, например, при  $\alpha_1 = 0.5$ ,  $W_{20} \leq 0.3\lambda$ .

При малых  $W_{20} \leq 0.3\lambda$  можно пользоваться также формулой, которая легко получается из (13) разложением  $\text{sinc}$  в ряд

$$S \cong 1 - 3.3\alpha_1^2 W_{20}^2 (4 - 3\alpha_1^2) \quad (16)$$

В случае, если местная деформация создает одинаковое отклонение волнового фронта по всей зоне деформации ( $W = \text{const}$ ), то при  $\alpha = 0, m = 1, r = 0$  получим

$$S = \left[ 1 - \alpha_1^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} W \right) \right]^2 - \alpha_1^4 \left( 1 + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda} W \right)$$

а при  $\alpha_1 < 0.4$

$$S \cong 1 - 2\alpha_1^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} W \right)$$

Видно, что при  $W = (2k + 1)\lambda / 2$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , число Штреля остается  $\geq 0.8$ , если размер зоны деформации  $\alpha_1 < 0.05$ , т. е. в два раза меньший по площади, чем для примера рассмотренного выше; при  $W = (2k + 1)\lambda / 4$   $\alpha_1^2 = 0.1$ , при  $W < k\lambda$   $\alpha_1^2 < 0.33$ .

В заключение следует отметить, что наличие больших (порядка нескольких длин волн) местных ошибок вывывает появление дополнительного рассеянного света в приборе. Величина относительной рассеянной энергии равна относительной потере освещенности в центре дифракционного пятна ( $S$ ) и ее расчет может быть произведен по приведенным выше формулам.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Норкин. *Optica Acta*. 23. 1966. 343.
2. А. Папулис. *Теория систем и преобразований в оптике*. М. Изд. «Мир». 1971.
3. Дж. Гудмен. *Введение в Фурье-оптику*. Изд. «Мир». 1970.
4. М. Борн, Е. Вольф. *Основы оптики*. Изд. «Наука». 1970.
5. А. Марешаль, М. Франсон. *Структура оптического изображения*. М. Изд. «Мир». 1964.