

ПРИМЕНЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПОЛИНОМА ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕРРАЦИИ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Л. РОДИОНОВ, Л. И. ПРЖЕВАЛИНСКИЙ, А. А. ШЕХОНИН

Рассматриваются вопросы представления аберраций оптических систем при помощи коэффициентов интерполяционного полинома волновой аберрации для данной точки предмета и данной длины волны. Выбираются узлы интерполяции, для принятого расположения узлов приводятся матричные выражения, позволяющие сократить количество вычислений и необходимый объем памяти при определении коэффициентов интерполяционного полинома. Приводятся результаты проверки точности описания аберраций этими коэффициентами.

При оценке степени коррекции и качества изображения оптических систем часто возникает необходимость в вычислении аберраций большого количества лучей. Например, при вычислении частотно-контрастных характеристик или функций рассеяния требуется от 10^2 до 10^4 лучей для каждой точки предмета [1, 2]. Расчет действительного луча является сравнительно трудоемкой операцией, требующей более 60 арифметических действий на каждую поверхность системы [3], поэтому рассчитывать для получения аберраций указанное количество лучей крайне неэффективно. Более рационально определить путем расчета небольшого количества лучей параметры какого-либо аналитического выражения, описывающего аберрации данного пучка, затем аберрации любого луча вычислить при помощи этого выражения.

Для центрированных оптических систем контур зрачка в большинстве случаев можно аппроксимировать эллипсом [4, 5], который при введении канонических координат [5] обращается в единичный круг. Аберрации данного пучка лучей описываются в таком случае функцией $W(\rho, \varphi)$ волновой аберрации от канонических полярных координат ρ, φ на единичном круге [7]. Поперечные аберрации находят как производные функции $W(\rho, \varphi)$ по соответствующим каноническим координатам.

Из возможных представлений функции $W(\rho, \varphi)$ наиболее известны разложения по полиномам Цернике [6] и разложение по степенному базису $\rho^i \cos^j \varphi$ Гопкинса [7].

В последнем случае, более удобном для вычислений, функция волновой аберрации

$$\begin{aligned} W(\rho, \varphi) = \sum_{ij} \omega_{ij} \rho^{2i+j} \cos^i \varphi = \\ + \omega_{00} + \\ + \omega_{10} \rho^2 + \omega_{01} \rho \cos \varphi + \\ + \omega_{20} \rho^4 + \omega_{11} \rho^3 \cos \varphi + \omega_{02} \rho^2 \cos^2 \varphi + \\ + \omega_{30} \rho^6 + \omega_{21} \rho^5 \cos \varphi + \omega_{12} \rho^4 \cos^2 \varphi + \omega_{03} \rho^3 \cos^3 \varphi + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где каждая строка содержит члены одной степени базиса $i + j$ или одного порядка аберраций. Если ограничиться аберрациями девятого порядка, то шесть строк разложения будут содержать 21 коэффициент, зная которые, можно определить волновую и поперечные аберрации для любой точки на зрачке, т. е. для любых значений ρ, φ .

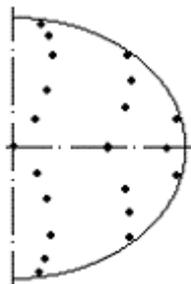


Рис.1. Схема расположения узлов интерполяции на каноническом зрачке.

Рассмотрим задачу определения этих коэффициентов. Для ее решения необходимо иметь значения волновых аберраций для n лучей ($n \geq 21$). Если $n > 21$, то задача сводится к определению коэффициентов аппроксимирующего полинома, например, по методу наименьших квадратов; если $n = 21$, то ω_{ij} есть коэффициенты интерполяционного полинома, которые легко определяются из решения линейной системы

$$\mathbf{T}\mathbf{C} = \mathbf{W} \text{ или } \mathbf{C} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{W} \text{ (в матричной форме)} \quad (2)$$

где

$$\mathbf{T}_{(21 \times 21)} = \{1, \rho_i^2, \rho_i \cos \varphi_i, \dots, \rho_i^5 \cos^5 \varphi_i\}; i = 1, \dots, 21 \quad - \text{ матрица системы,}$$

составленная из различных степеней координат $\rho_i \cos \varphi_i$ точек на зрачке, в которых известны значения $W(\rho_i, \varphi_i)$; \mathbf{T}^{-1} – обратная ей матрица;

$$\mathbf{W}_{(21 \times 1)} = \{W(\rho_i, \varphi_i)\}; \varphi_i = 1, \dots, 21 \quad - \text{ матрица-столбец свободных членов,}$$

составленная из значений волновой аберрации в точках на зрачке с координатами ρ_i, φ_i ;

$$\mathbf{C}_{(21 \times 1)} = \begin{pmatrix} \omega_{00} \\ \omega_{10} \\ \vdots \\ \omega_{05} \end{pmatrix} \quad - \text{ матрица-столбец неизвестных коэффициентов.}$$

Весьма существенным является выбор координат точек ρ_i, φ_i на зрачке (узлов интерполяции), в которых рассчитываются волновые аберрации действительных лучей. Этот выбор должен преследовать две цели: хорошую обусловленность матрицы \mathbf{T} , т. е. корректность решения задачи, и возможность разбиения ее на ряд матриц меньшей размерности, т. е. уменьшение количества действий. В выражении (2) матрица \mathbf{T} имеет размерность 21×21 , поэтому требуется порядка $21^3 \approx 10^4$ действий для решения системы (2), или порядка

$2 \times 21^2 \approx 10^3$ действий для умножения матриц, если обратная матрица \mathbf{T}^{-1} вычислена заранее. Ниже рассмотрен выбор координат точек, обеспечивающий сокращение размерностей матриц до 6×6 при хорошей их обусловленности. Пусть точки на зрачке расположены по следующему закону (рис.1):

$$\rho_i, \cos \varphi_{ij}; i = 0, 1 \dots 5; j = 0, 1, \dots, i, \quad (3)$$

где $\varphi_{ij} = \frac{\pi}{2i} + j \frac{\pi}{i}$, а $\rho_i = \cos \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{11} \right)$ – корни полинома Чебышева 10-й степени. Такой выбор узлов исходит из чебышевского принципа минимакса, т.е. минимума максимальной ошибки интерполяции.

Для рассматриваемого расположения узлов систему (2) можно записать в виде

$$W(\rho_k, \varphi_{kl}) = \sum_{j=0}^5 \sum_{i=0}^{5-j} \omega_{ij} \rho_k^{2i+j} \cos^j \varphi_{kl} = \sum_{j=0}^5 S_j(\rho_k) \cos^j \varphi_{kl}, \quad (4)$$

где

$$S_j(\rho_k) = \rho_k^j \sum_{i=0}^{5-j} \omega_{ij} \rho_k^{2i}, \quad (5)$$

или в матричных обозначениях:

$$\mathbf{R}_k \mathbf{C}_k = \mathbf{S}_k; \mathbf{W}_{5-k} = \mathbf{\Phi}_{5-k} \mathbf{Z}_{5-k}; k = 0, \dots, 5. \quad (6)$$

Матрицы, входящие в предыдущее выражение, имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= \left\{ \rho_{5-i}^{2j} \right\}_{(k+1) \times (k+1)}; & i &= 0, \dots, k; \\ & & j &= 0, \dots, k; \\ \mathbf{C}_k &= \left\{ \omega_{i \ 5-k} \right\}_{(k+1) \times 1}; & i &= 0, \dots, k; \\ \mathbf{\Phi}_k &= \left\{ \cos^j \varphi_{ki} \right\}_{(k+1) \times 6}; & i &= 0, \dots, k; \\ & & j &= 0, \dots, 5; \\ \mathbf{S}_k &= \left\{ \frac{S_k(\rho_i)}{\rho_i^k} \right\}_{(6-k) \times 1}; & i &= 5, 4, \dots, k; \\ \mathbf{Z}_k &= \left\{ S_i(\rho_k) \right\}_{6 \times 1}; & i &= 0, \dots, 5; \\ \mathbf{W}_k &= \left\{ W(\rho_k, \varphi_{ki}) \right\}_{(k+1) \times 1}; & i &= 0, \dots, k; \end{aligned} \quad (7)$$

Для удобства решения системы (6) разобьем матрицы $\mathbf{\Phi}_k$ и \mathbf{Z}_k а две матрицы, каждую следующим образом:

$$\mathbf{\Phi}_k = (\mathbf{\Phi}_{k,k} \ \mathbf{\Phi}_{k,5}); \mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{k,k} \\ \mathbf{Z}_{k,5} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{k,k} &= \left\{ \cos^j \varphi_{ki} \right\}_{(k+1) \times (k+1)}; & i &= 0, \dots, k; \\ & & j &= 0, \dots, k; \\ \mathbf{\Phi}_{k,5} &= \left\{ \cos^j \varphi_{ki} \right\}_{(k+1) \times (5-k)}; & i &= 0, \dots, k; \\ & & j &= k+1, \dots, 5; \\ \mathbf{Z}_{k,k} &= \left\{ S_i(\rho_k) \right\}_{(k+1) \times 1}; & i &= 0, \dots, k; \\ \mathbf{Z}_{k,5} &= \left\{ S_i(\rho_k) \right\}_{(5-k) \times 1}; & i &= k+1, \dots, 5; \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда решение этой системы можно записать как последовательность матричных операций:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_{k,k} &= \Phi_{k,k}^{-1} (\mathbf{W}_k - \Phi_{k,5} \mathbf{Z}_{k,5}); \\ \mathbf{S}_k(i) &= \mathbf{Z}_{i,i}(k); (i = 5, 4 \dots k); \\ \mathbf{C}_{5-k} &= \mathbf{R}_{5-k}^{-1} \mathbf{S}_k; \end{aligned} \right\} k = 5, 4, 3, 2, 1, 0. \quad (10)$$

Максимальный порядок матриц равен 6, обратные матрицы $\Phi_{k,k}^{-1}$ и \mathbf{R}_k^{-1} могут быть (при принятом фиксированном расположении точек на зрачке) рассчитаны раз навсегда. В этом случае общее количество арифметических операций в (10) равно 455, а потребный объем памяти – 287 чисел, т. е. примерно в два раза меньше, чем для системы (2).

Проверка показала, что 21 коэффициент (до 9-го порядка включительно), из которых $\omega_{00} = \omega_{01} = 0$, с удовлетворительной точностью описывают аберрации любых оптических систем. Проверка производилась путем сравнения поперечных аберраций, полученных дифференцированием интерполяционного полинома (1) (по схеме Горнера, с коэффициентами, определенными в соответствии с (10)), и поперечных аберраций в тех же точках зрачка, полученных точным расчетом действительных лучей. Поперечные аберрации вычислялись для точек меридионального ($\varphi = 0$) и сагиттального ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) сечений, т. е. для точек, не совпадающих с узлами интерполяции (3).

На рис. 2 показаны результаты сравнения, демонстрирующие хорошее совпадение графиков поперечных аберраций даже для случая резко меняющихся поперечных аберраций («хвостов»).

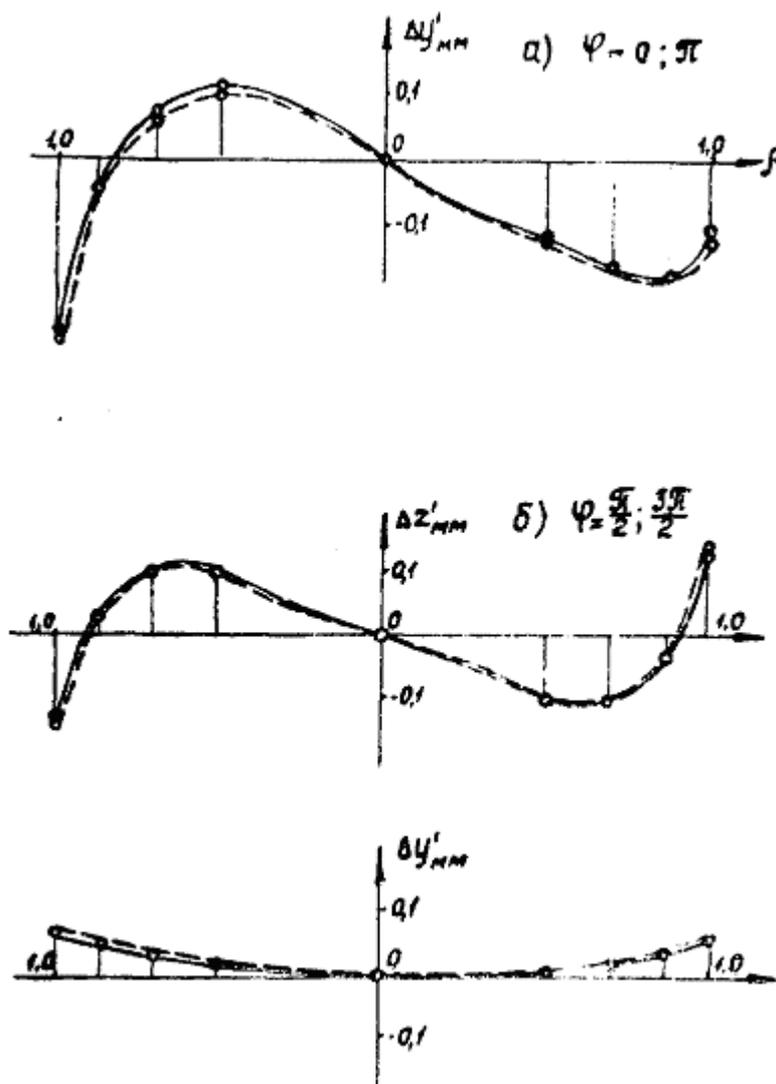


Рис.2. Графики поперечных аберраций:

а – меридиональное, б – сагитальное сечения;
 - - - - вычисление по коэффициентам интерполяционного полинома,
 ——— полученные расчетом действительных лучей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Macdonald J. *The Calculation of the Optical Transfer function*. «Optica Acta», vol. 18, No 4, p.269, 1971.
2. Леонова В. Б. *Автоматизация расчетов оптических систем*. М., Изд-во «Машиностроение», 1970.
3. Feder D. P. *Calculation of an Optical Merit Function and its Derivatives with Respect to the System Parameters*. «Journ. of the Opt. Soc. of Am», vol. 47, p. 913. 1957.
4. King W. B. *The Approximation of Vignetted Pupil Shape by an Ellipse*. «Appl. Opt», vol. 7, №1, p.197, 1968.
5. Hopkins H. H. *The Use of Diffraction based Criteria of Image Quality in Automatic Optical Design*. «Optica Acta», vol. 14, №1, p. 343, 1967.
6. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М., Изд-во «Наука», 1970.
7. Hopkins H. H. *Wave Theory of Aberrations*. Oxford Clarendon Press, 1949.