ПЕРЕДАЧА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТОТ НЕИЗОПЛАНАТИЧЕСКИМИ ПРИБОРАМИ

С. А. Родионов

В статье рассматривается общий случай образования изображения в отсутствие изопланатизма. Получено выражение, описывающее передачу пространственных частот объекта в изображении. Введено понятие неизопланатической передаточной функции (ОПФ), заменяющее обычную ОПФ в рассматриваемом случае. Показано, что известное соотношение фильтрования есть частный случай полученного общего выражения, рассмотрены условия, при которых возможно считать прибор изопланатическим. Полученные выводы иллюстрированы на примере хроматизма увеличения.

Одним из основных понятий современной теории качества изображения является оптическая передаточная функция (ОПФ), наиболее полно и наглядно характеризующая свойства изображающего прибора. Ее смысл как основной передаточной характеристики прибора вытекает из фундаментального «соотношения фильтрования», описывающего передачу пространственных частот объекта в изображении

$$\widetilde{I}'(\omega_y,\omega_z)=\widetilde{I}(\omega_y,\omega_z)D(\omega_y,\omega_z) \tag{1}$$

где $\widetilde{I}(\omega_y,\omega_z)$; $\widetilde{I}'(\omega_y,\omega_z)$ – комплексные спектры пространственных частот объекта и изображения соответственно, $D(\omega_y,\omega_z)$ – ОПФ прибора; ω_y, ω_z – пространственные частоты.

Выражение (1) есть в свою очередь преобразование Фурье соотношения «свертки», описывающего образование изображения в пространственных координатах y, z и y', z'

$$I'(y',z')=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} I(y,z)h(y'-y;z'-z)dydz \tag{2}$$

где $I(y,z)$, $I'(y',z')$ – функции объекта и изображения – функции распределения интенсивности в координатах y, z и y', z' на поверхностях предмета и изображения, $h(y'-y,z'-z)$ – функция рассеяния (ФР), описывающая распределение интенсивности в изображении точки, имеющей координаты y, z. При этом

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{I}(\omega_y,\omega_z)&=F_{y,z}[I(y,z)]\\ \widetilde{I}'(\omega_y,\omega_z)&=F_{y',z'}[I'(y',z')]\\ D(\omega_y,\omega_z)&=F_{y',z'}[h(y',z')]\end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

где оператор $F_{y,z}$ означает преобразование Фурье по переменным y, z.

Однако все изложенное справедливо только в предположении так называемого изопланатизма, т.е. независимости функции рассеяния $h(y'-y, z'-z)$ от координат точки предмета y, z.

Свертка (2) есть частный случай более общего выражения

$$I'(y',z') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int I(y,z)h(y,z,y'-y,z'-z)dydz \tag{4}$$

в котором ФР $h(y'-y, z'-z)$ есть функция четырех независимых переменных: y, z, $\Delta y' = y'-y$ и $\Delta z' = z'-z$. При наличии изопланатизма

$$\left.\begin{aligned} & h(y,z,\Delta y',\Delta z')\,|_{\substack{\Delta Y'=const \\ \Delta Z=const}} = const \\ & \text{или} \\ & h(y,z,\Delta y',\Delta z') = h(\Delta y',\Delta z') \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

т.е. ФР становится функцией только двух переменных $\Delta y'$, $\Delta z'$ и (4) переходит в свертку (2).

На практике, однако, условие изопланатизма (5) строго никогда не выполняется и выражение (4) не приводится к свертке, поэтому соотношение фильтрования (1) несправедливо, и вытекающее из него понятие ОПФ, вообще говоря, не имеет смысла. Известный прием для устранения отмеченного неудобства заключается в выделении на поверхности предмета небольшой области – изопланатической зоны, – в пределах которой условие (5) считается достаточно строго выполненным. При этом остается открытым вопрос о размерах этой области и о применимости указанного приема к приборам с линейным отступлением от изопланатизма, например, к оптическим системам при, наличии таких аберраций как кома, хроматизм увеличения и т. п. Представляется интересным в связи с этим рассмотреть общее выражение, заменяющее (1) и описывающее передачу пространственных частот без предположения об изопланатизме.

Для простоты рассмотрим сначала одномерный случай, когда функции объекта и изображения зависят каждая только от одной координаты $y\,(y')$.

Функция рассеяния $h(y, y'-y)$ в этом случае есть функция двух независимых переменных y и $\Delta y' = y'-y$, а выражение (4) приводится к виду

$$I'(y') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(y)h(y,y'-y)dy \tag{6}$$

Обычная ОПФ, определенная в соответствии с (3) для нашего одномерного случая как преобразование Фурье $h(y,\Delta y')$ по переменной $\Delta y'$ будет также зависеть от y

$$D(y,\omega') = F_{\Delta Y'}[h(y,\Delta y')] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(y,\Delta y')\exp(i\omega'\Delta y')d\Delta y' \tag{7}$$

и не будет иметь смысла в его обычном понимании, так как (1) не справедливо .

Можно, однако, неизопланатической ФР $h(y,\Delta y')$ поставить в соответствие некоторую неизопланатическую ОПФ $D(\omega,\omega')$, представляющую собой преобразование Фурье $h(y,\Delta y')$ по двум переменным y и $\Delta y'$

$$D(y,\omega') = F_{Y,\Delta Y'}[h(y,\Delta y')] = F_Y[D(y,\omega')] = \\ = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} h(y,\Delta y')\exp[i(\omega y + \omega'\Delta y')]dyd\Delta y' \tag{8}$$

Назовем пространственную частоту ω в отличие от обычной пространственной частоты, ω' частотой неизопланатизма, поскольку зависимость $D(\omega,\omega')$ от ω при фиксированном значении ω' определяет неизопланатичность в частотных представлениях. В случае изопланатизма эта зависимость имеет вид дельта-функции

$$D(\omega,\omega')\,|_{\omega'=const} = D(\omega')\delta(\omega) \tag{9}$$

т. е. размер области $\Delta\omega$, в которой $D(\omega,\omega')$ отлична от нуля, равен нулю.

При наличии неизопланатизма $\Delta\omega \geq 0$, причем, как нетрудно убедиться, зависит от ω', а именно, чем больше ω', тем больше и $\Delta\omega$. При $\omega' \to 0$ и $\Delta\omega \to 0$, т. е. (9) справедливо при частотах ω', близких к нулю во всех случаях.

Возьмем преобразование Фурье по переменной y' от обеих частей выражения (6)

$$\widetilde{I}'(\omega') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I(y)h(y,y'-y)dy\right]\exp(i\omega' y')dy' \tag{10}$$

Выразим $I(y)$ и $h(y,y'-y)$ через их преобразования Фурье

$$I(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{I}(\omega_1)\exp(-i\omega_1 y)d\omega_1$$

$$h(y,y'-y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} D(\omega_2,\omega'_2)\exp\{-i[\omega_2 y + \omega'_2(y'-y)]\}d\omega_2 d\omega'_2$$

и подставим в (10)

$$\widetilde{I}'(\omega') = \iint\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\iint \widetilde{I}(\omega_1)\exp(-i\omega_1, y)D(\omega_2,\omega'_2)\exp\{-i[\omega_2 y + \omega'_2(y'-y)]\}\times \\ \times\exp(i\omega' y')d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_2\, dydy'$$

Меняя порядок интегрирования и преобразуя, окончательно получим

$$\widetilde{I}'(\omega') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{I}(\omega'-\omega)D(\omega,\omega')d\omega \tag{11}$$

Полученное выражение и описывает передачу пространственных частот в общем случае неизопланатического прибора. Оно показывает, что в пространственную частоту ω' изображения вносят вклад не только та же частота объекта, как это было в случае изопланатизма, но все частоты объекта в интервале $\omega' \pm \Delta\omega$.

И наоборот, одну частоту объекта неизопланатический прибор передает в виде спектра частот в пространстве изображений, причем ширина этого спектра определяется величиной $\Delta\omega$.

Рассмотрим, например, объект в виде элементарной гармонической решетки с частотой ω_0

$$I_0(y) = 1 + \cos(\omega_0 y)$$

Спектр частот этого объекта является дискретным и представляет собой сумму трех дельта-функций, расположенных в точках 0, $\pm\omega_0$

$$\widetilde{I}_0(\omega) = \delta(\omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega \pm \omega_0)$$

Спектр изображения, этого объекта $\widetilde{I}'_0(\omega')$ в соответствии с (11) будет иметь вид

$$\begin{aligned}\widetilde{I}'_0(\omega') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega'-\omega) D(\omega,\omega') d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega'-\omega \pm \omega_0) D(\omega,\omega') d\omega = \\ &= D(\omega',\omega') + \frac{1}{2} D(\omega' \pm \omega_0, \omega')\end{aligned} \qquad (12)$$

Таким образом, спектр изображения представляет собой совокупность трех «сечений» тела $D(\omega,\omega')$ плоскостями, перпендикулярными координатной плоскости ω,ω', наклоненными под углом 45° к оси ω' и проходящими через точки $\omega' = 0$; $\omega' = \pm\omega_0$. При наличии неизопланатизма ширина всех трех сечений, зависящая от $\Delta\omega$, отлична от нуля, т. е. спектр изображения уже не является дискретным, содержит частоты, не присутствующие в объекте и, следовательно, изображение гармонического объекта уже не будет гармоническим.

В соответствии с изложенными соображениями понятие об ОПФ как о функции передачи контраста и сдвига, т. е. амплитуды и фазы элементарного гармонического объекта, при неизопланатизме в значительной степени теряет смысл.

Выражение (11) легко распространить на двухмерный случай

$$\widetilde{I}'(\omega'_y\, \omega'_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{I}(\omega'_y - \omega_y, \omega'_z - \omega_z) D(\omega_y, \omega_z, \omega'_y, \omega'_z) d\omega_y d\omega_z \qquad (13)$$

где неизопланатическая ОПФ $D(\omega_y, \omega_z, \omega'_y, \omega'_z)$ есть функция четырех пространственных частот: частот неизопланатизма ω_y, ω_z и обычных ω'_y, ω'_z

$$D(\omega_y, \omega_z, \omega'_y, \omega'_z) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} h(y, z, \Delta y', \Delta z')$$
$$\exp[i(\omega_y y + \omega_z z + \omega'_y \Delta y + \omega'_z \Delta z)] dy dz d\Delta y' d\Delta z'$$

Рассмотрим, в каких случаях можно вместо общего выражения (11) или (13) пользоваться выражением (1), т. е. считать прибор изопланатическим. Очевидно, что возможность такой замены зависит от значения частоты ω', для которого применяется выражение (11), а именно, от свойств спектра объекта в окрестности ω' и величины $\Delta\omega$ области неизопланатизма в частотном представлении. Действительно, пределы интегрирования в (11) определяются величиной $\Delta\omega$, поскольку вне этой области $D(\omega,\omega')=0$; поэтому, если спектр объекта можно считать постоянным в интервале $\omega'\pm\Delta\omega$, т. е. выполняется условие

$$\widetilde{I}(\omega'-\omega)=const\pm\varepsilon^2$$

при всех $\omega\in[-\Delta\omega,\Delta\omega]$, где ε^2 – некоторая допустимая погрешность, то его в выражении (11) можно вынести из-под интеграла

$$\widetilde{I}'(\omega')=\widetilde{I}(\omega')\int_{-\infty}^{+\infty}D(\omega,\omega')d\omega=\widetilde{I}(\omega')\overline{D}(\omega') \qquad (15)$$

где $\overline{D}(\omega')=\int_{-\infty}^{+\infty}D(\omega,\omega')d\omega$ – усредненная ОПФ. Пользуясь свойствами преобразования Фурье, легко получить

$$\overline{D}(\omega')=D(y,\omega')\,|_{y=0}$$

Таким образом, усредненная ОПФ представляет собой обычную ОПФ, определенную в центре зоны, следовательно, (15) идентично соотношению фильтрования (1) для одномерного случая.

Покажем, что для любого объекта выполнение условия (14) и, следовательно, возможность использования соотношения (1) вместо (11) зависит от размеров той изопланатической зоны, в пределах которой рассматривается образование изображения. Действительно, в этом случае спектр объекта в пределах зоны представляет собой свертку спектра исходного объекта и спектра зоны, т. е. функции $\mathrm{sinc}(\omega\Delta y)$, где $2\Delta y$ размер зоны. Тогда для любого объекта и любой частоты ω' условие (13) выполняется, если $\mathrm{sinc}(\omega\Delta y)>1-\varepsilon^2$ или, как можно получить из разложения sinc в ряд Тейлора

$$\Delta y<\sqrt{6}\,\frac{\varepsilon}{\Delta\omega}\ \text{или}\ \Delta y\Delta\omega<\sqrt{6}\varepsilon \qquad (16)$$

Так как $\Delta\omega$, как уже упоминалось, зависит от ω', то вопрос о том, можно ли считать тот или иной прибор изопланатическим, и, следовательно, применять к нему понятие ОПФ в обычном смысле, целиком определяется двумя величинами – интервалом пространственных частот ω' объекта и его размером Δy, или, другими словами, размерами объекта в частотной ω' и пространственной Δy областях.

Для примера применения полученных выражений рассмотрим случай хроматизма увеличения первого порядка по предмету и длине волны.

В этом случае функции рассеяния для различных длин волн света λ отличаются только сдвигом, который линейно зависит от величины предмета y и длины волны λ

$$h(y,\Delta y',\lambda)=h[\Delta y'-(a+by)\lambda] \tag{17}$$

Коэффициент a определяет постоянную составляющую хроматизма увеличения, коэффициент b – переменную по полю, т. е. неизопланатизм определяется величиной b.

Суммарная полихроматическая ФР определяется интегралом

$$h(y,\Delta y')=\int_{-\infty}^{+\infty} q(\lambda)h[\Delta y'-(a+by)\lambda]d\lambda \tag{18}$$

где $q(\lambda)$ – нормированная функция относительной спектральной эффективности.

Для неизопланатической полихроматической ОПФ получим

$$D(\omega,\omega')=\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int q(\lambda)h[\Delta y'-(a+by)\lambda]\exp[i(\omega y+\omega'\Delta y')]d\lambda dy d\Delta y'=$$

$$=\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int q(\lambda)h[\Delta y'-(a+by)\lambda]\exp\{i\omega'[\Delta y'-(a+by)\lambda]\}$$

$$\exp\{i[\omega y+\omega'(a+by)\lambda]\}d\lambda dy d\Delta y'= \tag{19}$$

$$=D(\omega')\int\int_{-\infty}^{+\infty} q(\lambda)\exp(i\omega' a\lambda)\exp[iy(\omega+\omega' b\lambda)]d\lambda dy=$$

$$D(\omega')\int_{-\infty}^{+\infty} q(\lambda)\exp(i\omega' a\lambda)\delta(\omega+\omega' b\lambda)d\lambda=\frac{q\left(\dfrac{\omega}{\omega' b}\right)}{\omega' b}\exp\left(i\frac{\omega a}{b}\right)$$

где $D(\omega')$ – монохроматическая ОПФ

$$D(\omega')=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\Delta y')\exp(i\omega'\Delta y')d\Delta y' \tag{20}$$

Рассмотрим применительно к данному случаю спектр изображения элементарного гармонического объекта. В соответствии с (12) и (19) имеем

$$\tilde{I}'_0(\omega')=D(\omega')\left[\frac{q\left(\dfrac{1}{b}\right)}{\omega' b}\exp\left(i\frac{\omega' a}{b}\right)+\frac{1}{2}\frac{q\left(\dfrac{1\pm\dfrac{\omega_0}{\omega'}}{b}\right)}{\omega' b}\exp\left(i\frac{\omega'\pm\omega_0}{b}a\right)\right]$$

Ширина этого спектра отлична от нуля и определяется шириной функции $q(\lambda)$ и величиной b.

Монохроматические изображения для различных длин волн λ легко получаются из предыдущего выражения, если в него подставить $q(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_i)$. Видно, что спектры частот таких изображений есть спектры гармонических изображений с частотами, зависящими от длины волны λ_i, т. е. отдельные монохроматические изображения являются изопланатическими, а полихроматическое неизопланатическое изображение гармонической решетки можно представить как результат сложения гармонических изображений с различными частотами, между которыми возникают «биения», что видно из расширения спектра в окрестности нулевой частоты.

Пусть $2\Delta\lambda$ – рабочий интервал длин волн, в котором $q(\lambda)$ отлична от нуля. Тогда размер $\Delta\omega$ области неизопланатизма определяется следующим образом:

$$\Delta\omega / \omega' b = \Delta\lambda \text{ или } \Delta\omega = \Delta\lambda\omega' b \tag{21}$$

и условие (15) принимает вид

$$\Delta y \omega' < \sqrt{6}\varepsilon / \Delta\lambda b \tag{22}$$

При выполнении (22) прибор может считаться изопланатическим. Следовательно, наличие хроматизма увеличения не препятствует при выполнении (22) применению обычных понятий ОПФ для описания передаточных характеристик прибора. При $\Delta\lambda = 0$ или $\mathrm{b} = 0$ прибор строго изопланатичен во всем частотном и координатном пространствах. Интересно отметить, что в левой части (22) стоит «площадь» объекта в пространственно – частотной области, где по одной оси откладывается пространственная координата y, а по второй – частотная ω'.