

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

С.А. РОДИОНОВ. В.В. УСОКИН

Рассматривается метод, позволяющий существенно уменьшить трудоемкость вычислений оптической передаточной (ОПФ) центрированных оптических систем по данным абберационного расчета. Приводится пример.

При вычислении оптической передаточной функции (ОПФ) центрированных оптических систем, у которых зрачок для любой точки поля может быть удовлетворительно представлен эллипсом, обычно пользуются выражением ОПФ в канонических или приведенных координатах [1, 3]:

$$D(s, \theta_s) = \frac{1}{\pi} \iint_s \exp[2\pi i s V(\beta_\theta, \gamma_\theta, s, \theta_s)] d\beta_\theta d\gamma_\theta, \quad (1)$$

где $D(s, \theta_s)$ – ОПФ – как функция канонической (приведенной) частоты s и угла ее ориентации θ_s ; $sV(\beta_\theta, \gamma_\theta, s, \theta_s) = W(\beta_\theta + s/2, \gamma_\theta) - W(\beta_\theta - s/2, \gamma_\theta)$ – разностная волновая абберация; $W(\beta, \gamma)$ – волновая абберация в длинах волн как функция канонических координат на зрачке β, γ ; $\begin{pmatrix} \beta_\theta \\ \gamma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_s & \sin \theta_s \\ -\sin \theta_s & \cos \theta_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ – координаты в системе, повернутой на угол θ_s относительно β, γ (см. рисунок 1).

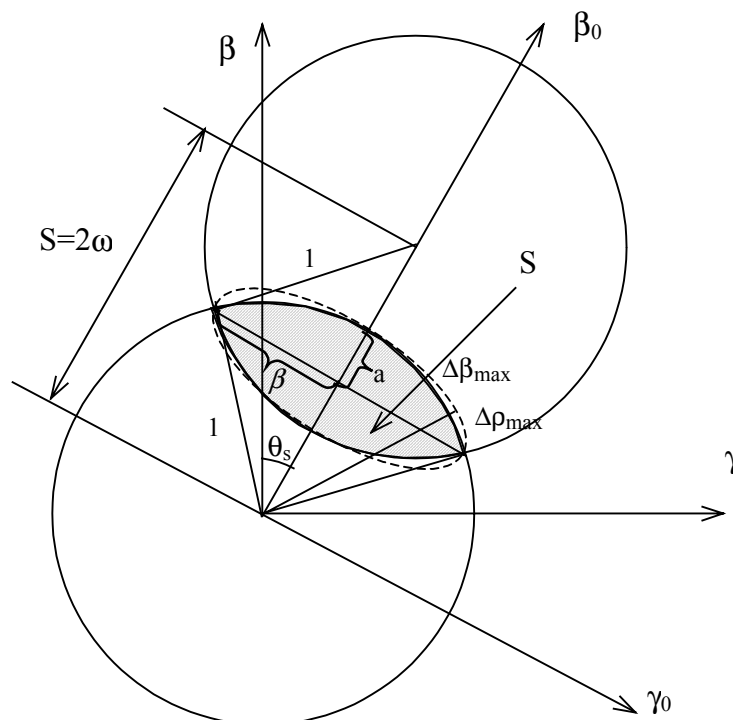


Рисунок 1.

Канонические координаты β, γ и канонические частоты s, θ_s определяются соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{Y}{A_y}; \\ \gamma = \frac{Z}{A_z}. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} s = (s_y^2 + s_z^2)^{1/2} = \nu \frac{\lambda}{A}; \\ \operatorname{tg} \theta_s = \frac{s_z}{s_y} = \frac{A_y}{A_z} \operatorname{tg} \theta; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} s_y = \frac{\lambda}{A_y}; \\ s_z = \frac{\lambda}{A_z}. \end{array} \right. \quad (2)$$

где Y, Z – координаты на зрачке (сфере сравнения), A_y, A_z и A – апертуры, ν_y, ν_z и ν – действительные пространственные частоты, λ – длина волны света.

Выражение (1) обладает рядом недостатков. Во-первых, в этом выражении не разделено влияние на ОПФ дифракции и аберраций. Во-вторых, неудобная форма области интегрирования S (см. рисунок 1), не поддающаяся единому аналитическому описанию и зависящая от частоты s , требует большого количества узлов интегрирования при вычислении (1) [1] и дополнительных действий для проверки, лежит ли узел в области S . Кроме того, в любом случае, как нетрудно показать, шаг интегрирования по переменной β_θ не может быть больше, чем шаг изменения частоты s .

Для устранения указанных недостатков воспользуемся аппроксимацией области интегрирования S эллипсом, показанным пунктиром на рисунке. Полуоси этого эллипса можно легко найти из рисунка

$$a = 1 - \omega; \quad b = (1 - \omega^2)^{1/2}, \quad (3)$$

где $\omega = s/2 = \nu/\nu_{\text{lim}} = \nu\lambda/2A$ – относительная частота ($0 \leq \omega \leq 1$).

Тогда площадь области S , аппроксимированной эллипсом,

$$S_s = \pi ab = \pi(1 - \omega)(1 - \omega^2)^{1/2}. \quad (4)$$

Оценка погрешности эллиптической аппроксимации дает максимальную величину этой погрешности вдоль радиуса канонического зрачка $\Delta\rho_{\text{max}} \approx 0.045$ при $\omega_{\text{max}} \approx 0.54$, $\gamma_{\theta\text{max}} \approx 0.75$, а при других значениях ω и γ_θ значительно меньше ($\Delta\rho < 0.02$). Эти величины того же порядка, что и погрешность физической реализации контура зрачка, например, ирисовой диафрагмой.

Преобразуем выражение (1), используя эллиптическую аппроксимацию. Для этого заменим координаты $\beta_\theta, \gamma_\theta$ в пределах области интегрирования координатами $\beta_\omega, \gamma_\omega$, отнесенными к соответствующим полуосям эллипса:

$$\beta_\omega = \frac{\beta_\theta}{a} = \frac{\beta_\omega}{(1 - \omega)}; \quad \gamma_\omega = \frac{\gamma_\theta}{b} = \frac{\gamma_\theta}{(1 - \omega^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

В этих координатах эллиптическая область интегрирования S_s , преобразуется в единичный круг, который, в свою очередь, преобразуется в прямоугольник со сторонами $1, 2\pi$ введением полярных координат $\rho_\omega^2, \varphi_\omega$:

$$\rho_{\omega}^2 = \beta_{\omega}^2 + \gamma_{\omega}^2; \varphi_{\omega} = \operatorname{arctg} \frac{\gamma_{\omega}}{\beta_{\omega}} \quad (6)$$

Заменяя в интеграле (1) переменные интегрирования в соответствии с (5) и (6), получим

$$D(\omega, \theta_s) = (1 - \omega)(1 - \omega^2)^{1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[2\pi i s V(\rho_{\omega}^2, \varphi_{\omega}, \omega, \theta_s)] d\rho_{\omega}^2 d\varphi_{\omega}. \quad (7)$$

Нетрудно заметить, что множитель $(1 - \omega)(1 - \omega^2)^{1/2}$ перед интегралом равен отношению площади эллиптической области интегрирования S_s к площади единичного круга – канонического зрачка и представляет собой, следовательно, не что иное, как безабберационную ОПФ $D_{o_s}(\omega)$ в эллиптической аппроксимации. Оценка этой ОПФ показывает, что она отличается от истинной безабберационной ОПФ $D_o(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[2 \arccos \omega - 2\omega(1 - \omega^2)^{1/2} \right]$ не более чем на 0.04, что вполне приемлемо для практических целей, поэтому в дальнейшем примем $D_{o_s}(\omega) \approx D_o(\omega)$. Тогда выражение (7) можно записать в виде

$$D(\omega, \theta_s) = D_o(\omega) D_a(\omega, \theta_s), \quad (8)$$

где

$$D_a(\omega, \theta_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[2\pi i s V(\rho_{\omega}^2, \varphi_{\omega}, \omega, \theta_s)] d\rho_{\omega}^2 d\varphi_{\omega}. \quad (9)$$

Таким образом, мы представили ОПФ как произведение безабберационной ОПФ $D_o(\omega)$, определяемой только дифракцией, и некоторой функции $D_a(\omega, \theta_s)$, которая включает в себя влияние aberrаций и может быть названа, поэтому aberrационным множителем ОПФ. Следует отметить, что выражение (8) в отличие от известных выражений [4] для разделения влияния дифракции и aberrаций справедливо (до погрешности эллиптической аппроксимации) во всем диапазоне частот.

Вычисление ОПФ сводится, следовательно, к вычислению вместо интеграла (1), aberrационного множителя (9). Область интегрирования в (9) – прямоугольник с постоянными размерами 1, 2π , стороны которого являются координатными линиями, поэтому все отмеченные выше недостатки выражения (1), связанные с областью S_s , устраняются, и появляется возможность построения эффективного алгоритма вычисления ОПФ.

Исходной информацией для вычисления является функция волновой aberrации $W(\beta, \gamma)$ в канонических координатах на единичном круге – каноническом зрачке. В численном виде эта функция удобнее всего представляется коэффициентами ω_{ij} своего разложения по координатам $\rho^2 = \beta^2 + \gamma^2$ и $\rho \cos \varphi = \beta$:

$$W(\beta, \gamma) = W(\rho, \cos \varphi) = \sum_{ij} \omega_{ij} \rho^i \cos^j \varphi; \quad (10)$$

$i + j$ – четное, $i \geq j$.

Было бы удобно для практического использования выражения (9) представить функцию разностной волновой аберрации $sV(\rho_\omega^2, \varphi_\omega, \omega, \theta_s)$ непосредственно через коэффициенты ω_{ij} . Наиболее простые выражения получаются для практически важных случаев $\theta_s = 0$ и $\theta_s = \pi/2$ т.е. для меридионального и сагиттального направлений частоты ω .

В дальнейшем ограничимся случаем $\theta_s = 0$; для $\theta_s = \pi/2$ рассуждения аналогичны.

Разложив функцию $sV(\rho_\omega^2, \varphi_\omega, \omega, \theta_s)$ в ряд Тейлора по степеням ω в окрестности точки $\omega = 0$, представим ее в виде

$$sV(\rho_\omega^2, \varphi_\omega, \omega, \theta_s) = 2\omega V,$$

где

$$V = \sum_k \frac{\omega^{2(k-1)}}{(2k-1)!} \frac{\partial^{(2k-1)} W(\beta, \gamma)}{\partial \beta^{(2k-1)}}, \begin{cases} \beta = (1-\omega)\rho_\omega \cos \varphi_\omega \\ \gamma = (1-\omega^2)^{1/2} \rho_\omega \sin \varphi_\omega \end{cases}. \quad (11)$$

Разложение (11) конечно, поскольку конечно разложение (10). Функция V в координатах $\rho_\omega, \varphi_\omega$, как и волновая аберрация W в координатах ρ, φ , определена на единичном круге и обладает аналогичными свойствами симметрии, поэтому ее можно представить подобным же разложением:

$$V(\rho_\omega, \varphi_\omega) = \sum_{ij} v_{ij} \rho_\omega^i \cos^j \varphi_\omega. \quad (12)$$

Коэффициенты v_{ij} этого разложения определяются коэффициентами ω_{ij} волновой аберрации и относительной частотой ω .

Соответствующие выкладки из (10) и (11) приводят к выражениям следующего вида для связи v_{ij} и ω_{ij} :

$$v_{ij} = (1-\omega)^f (1-\omega^2)^g P_m(\omega), \quad (13)$$

где $P_m(\omega) = \sum_{k=0}^m p_k \omega^k$ — полином степени m от ω .

Показатели степени f и g множителей $(1-\omega)$ и $(1-\omega^2)$, а также коэффициенты p_k и степень m полинома определяются номером коэффициента v_{ij} , причем коэффициенты полинома p_k представляют собой линейную комбинацию определенного числа коэффициентов волновой аберрации ω_{ij} и, поскольку они не зависят от ω , могут быть вычислены заранее.

Для вычисления интеграла (9) наиболее рациональным является метод Гопкинса [2], который дает

$$D_a(\omega, 0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_\rho} \sum_{k=1}^{N_\varphi} \exp(4\pi i \omega V) \operatorname{sinc}\left(4\pi\omega \frac{\partial V}{\partial \rho_\omega^2}\right) \operatorname{sinc}\left(4\pi\omega \frac{\partial V}{\partial \varphi_\omega}\right), \quad (14)$$

где $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$; N – общее количество узлов.

Значения функции V и ее производных в узлах интегрирования $\rho_{\omega k}^2, \varphi_{\omega k}$ можно легко вычислить по схеме Горнера по известным коэффициентам v_{ij} . Так как область интегрирования и узлы интегрирования фиксированы, появляется возможность вычислить все величины, зависящие только от координат узлов, заранее раз и навсегда.

Оптимальное количество узлов $N = N_\rho \times N_\varphi$, определенное экспериментально, оказалось равным 8×8 . При этом погрешность оказывается минимальной. Дальнейшее увеличение количества узлов бесполезно, так как оставшаяся погрешность обусловлена, в основном, эллиптической аппроксимацией и не зависит от количества узлов. Кроме того, начинают сказываться погрешности округления. В таблице приведены результаты сравнения вычисленных значений ОПФ для $\omega_{20} = 7.2$; $\omega_{40} = -14.4$; $\omega_{60} = 8.0$ с эталонными, которые взяты из [1].

ω	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$D_{эм}(\omega)$	0.689	0.267	0.070	0.045	0.078	0.111	0.080	0.028	0.004	0.029
$D_{выч}(\omega)$	0.678	0.248	0.064	0.042	0.078	0.103	0.072	0.028	0.006	0.030

Погрешность вычислений не превышает 0.01–0.018 и вполне приемлема для практического использования результатов, так как погрешности физической реализации ОПФ из-за ошибок изготовления и сборки или погрешности измерений, как показывает практика, обычно значительно превышают указанную величину. Следует отметить, что обычные методы для вычисления ОПФ без эллиптической аппроксимации требуют для получения такой же погрешности не менее 20×20 узлов, т. е. в 6 раз больше. Время, необходимое для вычисления одного значения ОПФ при использовании 20 коэффициентов волновой аберрации (т. е. до 9-го порядка), не превышает 4сек на ЦВМ «Минск-22» (~5000 операций в секунду). Это время также почти на порядок меньше, чем при использовании существующих методов.

1. ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский А. В. О вычислении частотно-контрастной характеристики по методу Гопкинса. «Оптика и спектроскопия», 1967, т. 23, вып. 2.
2. Hopkins H. H. The Numerical Evaluation of the Frequency Response of Optical System. Proc. Phys. Soc. B70, Part 10, No. 454B, 1957.
3. Hopkins H. H. The Use of Diffraction Based Criteria of Image Quality in automatic Optical Design. Optica Acta, 13, No. 4, 1966.
4. Miyamoto K. Geometrical Approximation of Optical Transfer Function. Jap. Journal of Appl. Phys. 4, Suppl. 1, 1965.