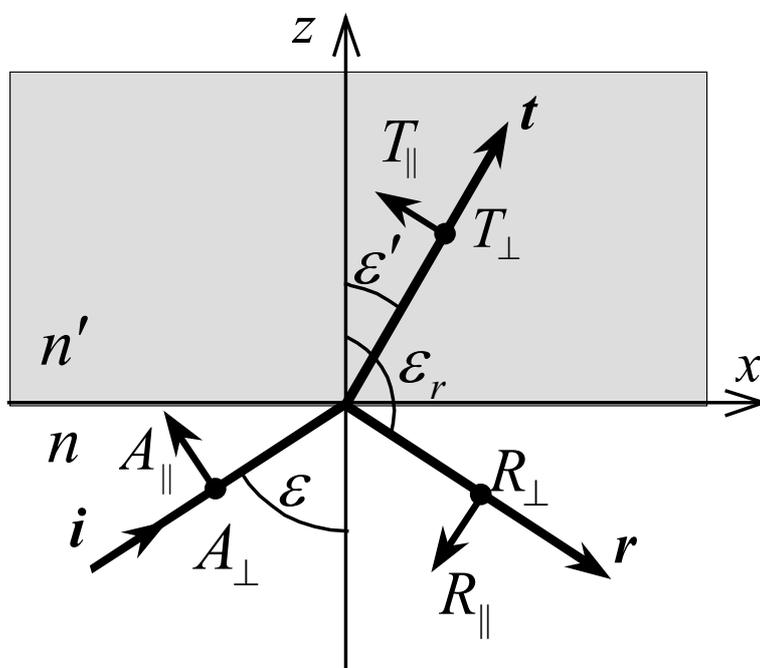


САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Родионов

# ОСНОВЫ ОПТИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ



Санкт-Петербург

2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ  
ТОЧНОЙ МЕХАНИКИ И ОПТИКИ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Родионов

**ОСНОВЫ ОПТИКИ**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Санкт-Петербург

2000

Родионов С.А. Основы оптики. Конспект лекций. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. - 167 с.

Излагаются фундаментальные основы геометрической оптики. На основе уравнений Максвелла рассматриваются основные свойства световых полей и их математическое описание. Излагается теория идеальных оптических систем, рассматриваются реальные оптические системы и их отличия от идеальных. Излагаются основы теории aberrаций, характеристики и критерии качества оптического изображения, и влияние на них aberrаций.

Для студентов оптических направлений подготовки и специальностей.

Конспект лекций подготовлен на кафедре прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики (технического университета) на базе материалов многолетнего чтения лекций заведующим кафедрой прикладной и компьютерной оптики, д.т.н., профессором Родионовым С.А.

Составители: д.т.н., доц. Вознесенский Н.Б.; к.т.н., доц. Иванова Т.В.

Рецензенты : к.т.н., проф. Шехонин А.А.; д.т.н., проф. Путилин Э.С.

Одобрено на заседании кафедры Прикладной и компьютерной оптики 30 ноября 2000 г., протокол № 2.

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области приборостроения и оптотехники для межвузовского использования, протокол №15 от 30 ноября 2000 г.

© Санкт-Петербургский государственный  
институт точной механики и оптики  
(технический университет), 2000  
© С.А.Родионов, 2000

## Введение

Дисциплина «Основы оптики» посвящена изучению законов распространения и преобразования светового поля, то есть электромагнитного поля в оптическом диапазоне частот. «Основы оптики» охватывают настолько обширный и глубокий по содержанию материал, что по праву считаются фундаментальной дисциплиной, являющейся неотъемлемой компонентой оптического образования.

Изучение всех вопросов данной дисциплины важно как для усвоения базовых понятий, активно используемых в других более специальных дисциплинах, так и для получения достаточно полного представления об основных научных концепциях современной оптики.

Вся дисциплина «Основы оптики» состоит из двух больших частей – геометрической и физической оптики. В данном конспекте лекций рассматривается геометрическая оптика – наука о законах распространения света в оптических системах и формировании оптического изображения. Изложение материала базируется на классической электродинамике и уравнениях Максвелла. В данном пособии рассматриваются только линейные явления в оптике, а взаимодействие света с препятствиями рассматривается только в виде амплитудно-фазовых превращений. Явления перехода одного вида энергии в другой обсуждаются лишь в связи с регистрацией интенсивности света. Квантовомеханические явления также не рассматриваются, а дифракционные процессы излагаются в рамках классической теории дифракции Релея-Зоммерфельда.

В первой части пособия (главы 1 – 6) рассматриваются основные свойства световых полей и их математическое описание, а также понятия световых волн, световых лучей и пучков. Излагается теория идеальных оптических систем в классической и матричной форме.

В главе 1 рассматривается вывод волнового уравнения для комплексной амплитуды поля – уравнения Гельмгольца, а в главе 4 – вывод основного уравнения геометрической оптики – уравнения эйконала.

В главе 2 рассматриваются энергетические характеристики светового поля, которые разделяются на собственно энергетические и световые.

Законы геометрической оптики, рассматриваемые в главе 4, вытекают из основного положения этой дисциплины – приближения коротких длин волн, при котором длина волны считается пренебрежимо малой величиной по сравнению с неоднородностями среды и самого поля. Волновые свойства света

учитываются только в области фокусов пучков лучей, а также при описании прохождения света через границу двух сред (глава 3).

Теория идеальных оптических систем (глава 5) излагается вначале в классической форме Ньютона-Гаусса, а затем с использованием матричного аппарата и соответствующих понятий матриц преобразования координат нулевых лучей (глава 6).

Вторая часть пособия (главы 7 – 9) посвящена основам теории образования изображения в реальных оптических системах. Теория реальных оптических систем охватывает понятие реальных лучей, ограничение пучков лучей в оптических системах, систему обобщенных (канонических) характеристик (глава 7), а также aberrации, их типы и порядки (глава 8). В главе 9 рассматриваются критерии и характеристики качества изображения безаберрационных оптических систем, теоретические пределы разрешения, влияние aberrаций на характеристики качества и разрешение, а также понятие дифракционно-ограниченных и геометрически-ограниченных оптических систем.

# 1. Описание световых волн

## 1.1. Основные свойства световых полей

Световым полем называют электромагнитное поле в **оптическом диапазоне** частот. Оптические частоты чрезвычайно велики (порядка  $10^{14} - 10^{15} \text{ Гц}$ ), а разность частот между границами оптического диапазона очень мала по сравнению с их величинами, поэтому принято измерять оптический диапазон в длинах волн. Специфика оптического диапазона заключается в его двух главных особенностях:

- в оптическом диапазоне выполняются законы геометрической оптики,
- в оптическом диапазоне свет очень слабо взаимодействует с веществом.

Для частот, более низких, чем частоты оптического диапазона, нельзя построить оптические системы по законам геометрической оптики, а электромагнитное поле более высоких частот, как правило, либо проходит сквозь любое вещество, либо разрушает его.

Оптический диапазон состоит из следующих видов излучения: **рентгеновское, ультрафиолетовое (УФ), видимое, инфракрасное (ИК)**. Если во времена Ньютона в оптический диапазон входило только видимое излучение, то с техническим прогрессом диапазон существенно расширился, причем рентгеновское излучение включено в оптический диапазон совсем недавно – примерно 20 лет назад. Не исключено дальнейшее расширение оптического диапазона.

На рис.1.1.1 показан участок шкалы электромагнитного излучения в длинах волн, соответствующий оптическому диапазону. Границы оптического диапазона, а также границы между его участками установлены на основе экспериментальных данных и не являются абсолютно точными.

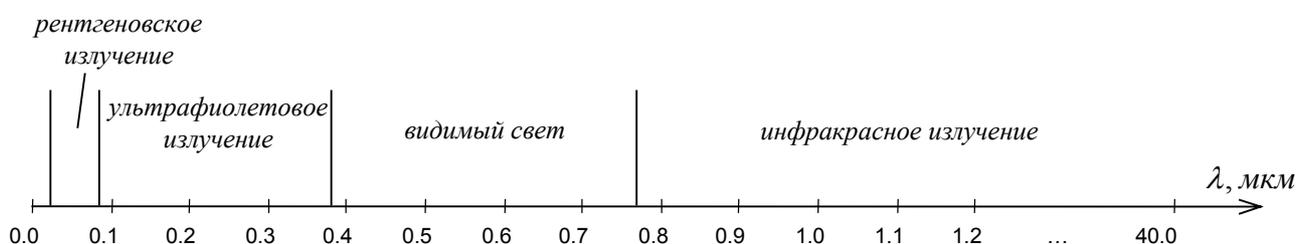


Рис. 1.1.1. Оптический диапазон.

## 1.2. Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла явились итогом интенсивных исследований электричества, магнетизма и световых явлений, проводимых в первой половине XIX века. В то время, когда стало ясно, что свет и электромагнитное поле – это одно и то же, появился и универсальный математический аппарат, связывающий между собой функции изменения во времени и пространстве электрического и магнитного полей.

Электромагнитное поле по своей природе векторное, то есть все его изменения, происходящие во времени, имеют определенную ориентацию в пространстве.

Основными величинами, определяющими электромагнитное поле, являются **вектор электрической напряженности поля  $\mathbf{E}$**  и **вектор магнитной напряженности поля  $\mathbf{H}$** . Эти векторы являются функциями времени  $t$  и координат в пространстве, описываемых **радиус-вектором  $\mathbf{r}$** :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), [\mathbf{E}] = \text{вольт} / \text{м}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), [\mathbf{H}] = \text{А} / \text{м}$$

В среде, отличной от вакуума, под действием электромагнитного поля возникает **электрическая индукция  $\mathbf{D}$**  и **магнитная индукция  $\mathbf{B}$** :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t), [\mathbf{D}] = \text{кЛ} / \text{м}^2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), [\mathbf{B}] = \text{вебер} / \text{м}^2$$

В уравнения Максвелла кроме указанных величин входят **объемная плотность заряда  $\rho$** , **поверхностная плотность тока  $\mathbf{J}$** , **электрическая проницаемость  $\varepsilon$**  и **магнитная проницаемость  $\mu$**  среды:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t), [\rho] = \text{кЛ} / \text{м}^3$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), [\mathbf{J}] = \text{А} / \text{м}^2$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}), \mu = \mu(\mathbf{r})$$

**Уравнения Максвелла** (*Maxwell's equations*) обычно записываются в дифференциальной форме с использованием обозначений, приведенных в Приложении А. Эти уравнения имеют следующий вид:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \quad (3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{array} \right. \quad (5) \quad (1.2.1)$$

$$(4) \quad (6)$$

Уравнения (5-6) называют **материальными уравнениями**, так как они учитывают свойства вещества.

Уравнения Максвелла в классических обозначениях имеют вид:

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (1)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J} \quad (2) \quad (1.2.2)$$

$$\mathit{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

В вакууме и диэлектриках, плотность заряда и токи равны нулю:  $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ , поэтому уравнения Максвелла для диэлектрической среды выглядят следующим образом:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \dot{\mathbf{D}} \quad (2) \quad (1.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

Для вакуума из уравнений Максвелла можно получить следующее важное соотношение:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c} \quad (1.2.4)$$

где  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ км/с}$  – скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные в вакууме.

Электрическая проницаемость  $\varepsilon$  для разных сред может принимать различные значения, а магнитная проницаемость  $\mu$  для оптических частот во всех средах практически не отличается от  $\mu_0$ . Для линейных сред  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то есть электрическая и магнитная постоянные линейной среды не зависят от интенсивности света.

Уравнения Максвелла описывают векторное поле. Вектор электрической напряженности перпендикулярен вектору магнитной напряженности, и оба они перпендикулярны направлению распространения света (рис.1.2.2), поэтому такое поле называется поперечным.

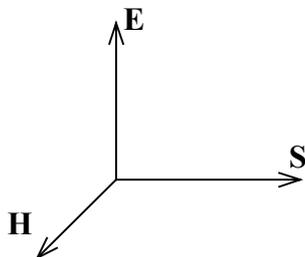


Рис. 1.2.2 . Взаимное расположение векторов электрической (**E**) и магнитной (**H**) напряженности и направления распространения света (**S**).

### **1.3. Математическое описание электромагнитных волн**

Распространение электромагнитного поля в пространстве – это волновой процесс, описание которого можно получить из уравнений Максвелла (1.2.1). Уравнения Максвелла описывают свойства электромагнитных волн в наиболее общем случае, но их непосредственное использование не всегда удобно. Поэтому для случая линейных и однородных сред можно получить более простые волновые уравнения, из которых следуют все законы геометрической оптики.

#### **1.3.1. Волновые уравнения**

В оптике часто рассматривают изменение электрического и магнитного полей независимо друг от друга, и тогда векторный характер поля не является существенным, а электромагнитное поле можно рассматривать и описывать как скалярное (подобно звуковому полю). Скалярная теория значительно проще векторной, и вместе с тем дает возможность достаточно глубоко анализировать распространение световых пучков и процессы образования изображения в оптических системах. В геометрической оптике скалярная теория широко используется именно благодаря тому, что электрическое и магнитное поля в этом случае могут быть описаны независимо друг от друга, а волновые уравнения одинаковы для векторного и скалярного полей.

Рассмотрим вывод волновых уравнений непосредственно из уравнений Максвелла. Возьмем уравнение для ротора электрического поля, определяемого через производную по времени от магнитной индукции:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Векторно домножим это уравнение на  $\nabla$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\mu \left( \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \right) = -\mu \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \right) = \\ &= -\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\varepsilon \mathbf{E}) \right) = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражением (А.15) из Приложения А, получим:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Так как дивергенция электрического поля в диэлектрической среде  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ , то в однородной среде  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ , что следует из уравнений Максвелла (4, 5). Тогда получим **волновое уравнение для электрической составляющей поля:**

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.3.1)$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Поскольку  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ , одно векторное уравнение распадается на три

скалярных уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 E_x = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 E_y = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 E_z = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить **волновое уравнение для магнитной составляющей поля:**

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (1.3.3)$$

Поскольку  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}$ , то это векторное уравнение также распадается на

три скалярных уравнения:

$$\begin{cases} \nabla^2 H_x = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \\ \nabla^2 H_y = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 H_z = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Из уравнений Максвелла следует, что каждая из составляющих  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  вектора  $\mathbf{E}$  подчиняется абсолютно одному и тому же скалярному уравнению. Поэтому, если требуется знать изменение только какой-нибудь одной из составляющих вектора  $\mathbf{E}$ , мы можем рассматривать векторное поле как скалярное. Перед тем, как окончательно перейти к скалярной теории, следует заметить, что составляющие вектора  $\mathbf{E}$  не являются независимыми функциями, что вытекает из условия  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Поэтому, хотя скалярные волновые уравнения являются следствием уравнений Максвелла, обратно перейти от них к уравнениям Максвелла нельзя.

Пусть скалярная величина  $V$  – это любая из составляющих электрического вектора: ( $E_x$ ,  $E_y$  или  $E_z$ ). Иными словами, это возмущение поля в какой-то точке пространства в какой-то момент времени  $V(x, y, z, t)$ . Тогда можно записать **волновое уравнение в общем виде:**

$$\nabla^2 V = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1.3.5)$$

где  $\nabla^2 V$  – вторая производная возмущения по пространственным координатам,

$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$  – вторая производная возмущения по времени.

Смысл этого уравнения заключается в том, что волна образуется тогда, когда у некоторого возмущения вторая производная по пространственным координатам пропорциональна второй производной по времени.

Можно показать, что скорость распространения волны для диэлектриков связана с электрической и магнитной проницаемостями среды следующим образом:

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2} \quad (1.3.6)$$

Следовательно, скорость распространения волны в пространстве определяется так:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (1.3.7)$$

Тогда общий вид волнового уравнения можно записать следующим образом:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1.3.8)$$

**Волновое уравнение для одной оси координат:**

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1.3.9)$$

Отношение скорости света в вакууме к скорости света в среде называется **показателем преломления данной среды по отношению к вакууму** (*index of refraction*):

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (1.3.10)$$

### 1.3.2. Монохроматическое поле

**Монохроматическое поле** – это поле, зависящее от времени по гармоническому закону (рис.1.3.1):

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi_0(\mathbf{r})) \quad (1.3.11)$$

где  $a(\mathbf{r})$  – амплитуда возмущения (функция пространственных координат),

$\omega$  – циклическая частота изменения поля во времени,

$\varphi_0(\mathbf{r})$  – фаза поля (функция пространственных координат).

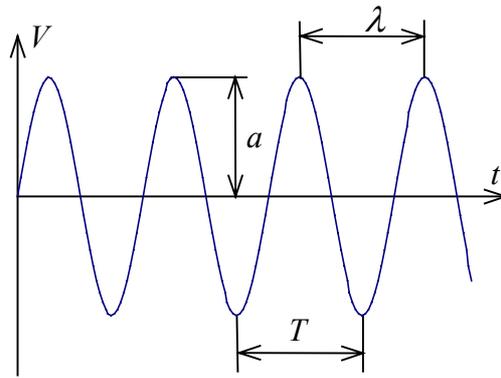


Рис.1.3.1. Изменение монохроматического поля во времени.

Монохроматическое поле также характеризуется **периодом колебаний**  $T$  или **частотой**  $\nu$ :

$$\nu = \frac{1}{T}, [c^{-1}] = [Гц] \quad (1.3.12)$$

причем циклическую частоту  $\omega$  можно выразить через частоту  $\nu$ :

$$\omega = 2\pi\nu, \left[ \frac{рад}{с} \right] \quad (1.3.13)$$

Гармоническую волну характеризуют также пространственный период – **длина волны**  $\lambda$ :

$$\lambda = \nu \cdot T = \frac{\nu}{\nu} = \frac{\nu}{\omega} \cdot 2\pi \quad (1.3.14)$$

и **волновое число**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{\nu} \quad (1.3.15)$$

Излучение с определенной длиной волны обладает соответствующим цветом (рис.1.3.2).

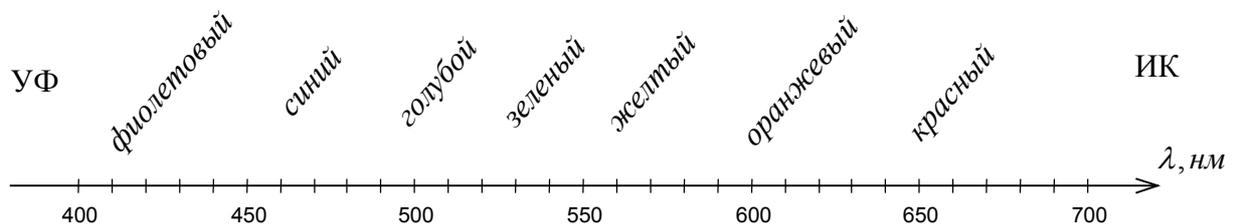


Рис.1.3.2. Спектр видимого излучения.

Постоянными характеристиками, не зависящими от показателя преломления, для монохроматического поля являются: частота  $\nu$ , циклическая частота  $\omega$  и период колебаний  $T$ . Длина волны  $\lambda$  и волновое число  $k$  меняются в зависимости от показателя преломления, так как меняется скорость

распространения света в среде ( $v = c/n$ ). Итак, частота в среде всегда сохраняется, а длина волны изменяется. Длину волны и волновое число в некоторой среде с показателем преломления  $n$  можно определить так:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (1.3.16)$$

$$k = k_0 n$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме,  $k_0$  – волновое число в вакууме.

Иногда при описании монохроматического поля вместо фазы  $\varphi_0$  используют другие понятия. Введем в выражение для волнового возмущения волновое число  $k_0$  вместо циклической частоты  $\omega$ :

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (1.3.17)$$

Тогда волновое возмущение запишется так:

$$V(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos k_0 [ct - E(\mathbf{r})] \quad (1.3.18)$$

где  $E(\mathbf{r})$  – это **эйконал** поля:

$$E = \frac{\varphi_0}{k_0} = \frac{\varphi_0}{2\pi} \lambda_0, \text{ [нм]} \quad (1.3.19)$$

Слово “эйконал” происходит от греческого слова *εικων* (эйкон – образ). В русском языке этому соответствует слово “икона”.

В отличие от фазы поля эйконал более удобная величина для оценки изменения фазы от луча к лучу, так как непосредственно связан с геометрической длиной хода луча.

**Оптическая длина луча**  $nl$  (*optical path difference, OPD*) – это произведение показателя преломления  $n$  на геометрическую длину пути  $l$ .

Приращение эйконала равно оптической длине луча:

$$\Delta E = nl \quad (1.3.20)$$

Если фаза изменяется на  $2\pi$ , то эйконал изменяется на  $\lambda_0$ :

$$\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta E = \lambda_0; \text{ если фаза изменяется на } \pi, \text{ то эйконал изменяется на } \frac{\lambda_0}{2}:$$

$$\Delta\varphi = \pi \Rightarrow \Delta E = \frac{\lambda_0}{2}; \text{ если фаза изменяется на } \frac{\pi}{2}, \text{ то эйконал изменяется на } \frac{\lambda_0}{4}:$$

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{\lambda_0}{4}.$$

Эйконал имеет огромное значение в теории оптического изображения, так как понятие эйконала позволяет, во-первых, описать весь процесс образования изображения с позиций волновой теории света, а во-вторых, наиболее полно проанализировать искажения передачи изображения оптическими приборами. Теория эйконала, разработанная в XIX веке Петцвалем, Зейделем и Шварцшильдом, явилась важным фундаментальным достижением геометрической оптики, благодаря которому стало возможным создание оптических систем высокого качества.

### 1.3.3. Комплексная амплитуда

Гармонические колебания удобно описывать через комплексную амплитуду. Для этого применяют экспоненциальное представление комплексных чисел:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.3.21)$$

где  $\cos \varphi$  – действительная часть, а  $\sin \varphi$  – мнимая часть комплексной функции.

Представим, что монохроматическое поле (1.3.18) – это действительная часть от некоторой функции:

$$V(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ a(\mathbf{r}) \cdot e^{-k_0[ct - E(\mathbf{r})]} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ a(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 E(\mathbf{r})} \cdot e^{-ik_0 ct} \right\} \quad (1.3.22)$$

где составляющая  $a(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 E(\mathbf{r})}$  зависит только от пространственных координат, а составляющая  $e^{-ik_0 ct}$  зависит только от времени.

Пусть  $U(\mathbf{r})$  – комплексная амплитуда поля, то есть функция только пространственных координат:

$$U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \cdot e^{ik_0 E(\mathbf{r})} \quad (1.3.23)$$

где  $a(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|$  – вещественная амплитуда (или просто амплитуда).

Если вещественная амплитуда волны не зависит от пространственных координат, то такая волна называется **однородной волной**.

Тогда эйконал поля выразим так:

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{k_0} \arg [U(\mathbf{r})] \quad (1.3.24)$$

где  $\arg [U(\mathbf{r})] = \varphi_0(\mathbf{r})$  – фаза поля.

Удобство использования такой записи заключается в простоте сложения полей. Допустим, имеются два поля:  $V_1(\mathbf{r}, t) = U_1(\mathbf{r}) \cdot e^{-ik_0 ct}$ , и

$V_2(\mathbf{r}, t) = U_2(\mathbf{r}) \cdot e^{-ik_0 ct}$ . При сложении полей их комплексные амплитуды складываются, а временной экспоненциальный множитель можно вынести за скобки и не учитывать:

$$U_{\Sigma} = U_1 + U_2 \quad (1.3.25)$$

Таким образом, можно считать, что комплексная амплитуда полностью описывает монохроматическое поле, так как она объединяет амплитуду и эйконал.

#### 1.3.4. Уравнение Гельмгольца

Если поле монохроматическое, то дифференцирование по времени, сводится к умножению скалярной амплитуды на мнимый множитель  $(-ik_0 c)$ . Таким образом, если подставить в волновое уравнение (1.3.18) описание монохроматического поля (1.3.23), то после преобразований мы получим волновое уравнение для монохроматического поля, в которое будет входить только комплексная амплитуда (уравнение Гельмгольца).

**Уравнение Гельмгольца (*Helmholtz equation*):**

$$\|\ (\nabla^2 + k^2) \cdot U = 0 \quad (1.3.26)$$

или

$$\|\ \nabla^2 U + n^2 k_0^2 U = 0$$

### 1.4. Регистрируемые (наблюдаемые) характеристики поля

#### 1.4.1. Интенсивность поля

Амплитуда поля не может непосредственно наблюдаться или измеряться, так как поле очень быстро меняется во времени с частотой  $\nu \approx 10^{15} \text{сек}^{-1}$  и  $T = 10^{-15} \text{сек}$ , а любые приемники излучения имеют значительно большее, чем период колебаний, время инерции  $\Delta\tau \gg 10^{-15} \text{сек}$ . Поэтому регистрируется лишь усредненная во времени величина – **интенсивность поля  $I$** .

Из уравнений Максвелла следует, что интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды поля  $I \sim a^2$ , то есть равна квадрату модуля комплексной амплитуды (произведению комплексной амплитуды на величину, комплексно сопряженную ей):

$$\|\ I = |U|^2 = UU^* \quad (1.4.1)$$

Можно измерить квадрат модуля комплексной амплитуды, но невозможно измерить фазу и эйконал поля – при регистрации поля они теряются. Для сохранения информации о фазе (эйконале) требуется измерение интенсивности поля, складываемого из нескольких полей.

#### 1.4.2. Наблюдаемые величины при сложении полей

При сложении двух полей  $U_1 = a_1 e^{i\varphi_1}$  (с фазой  $\varphi_1 = k_0 E_1$ ) и  $U_2 = a_2 e^{i\varphi_2}$  (с фазой  $\varphi_2 = k_0 E_2$ ), суммарную интенсивность можно представить в виде:

$$I = |U_\Sigma|^2 = U_\Sigma U_\Sigma^* = (U_1 + U_2)(U_1^* + U_2^*) = U_1 U_1^* + U_2 U_2^* + U_1 U_2^* + U_2 U_1^* = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + a_1 a_2 e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\Delta\varphi) = I_\Sigma$$

Таким образом, суммарная интенсивность записывается в виде **уравнения интерферограммы**:

$$I_\Sigma = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(\Delta\varphi), \quad (1.4.2)$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi\Delta E}{\lambda_0}$  – разность фаз поля.

Явление, возникающее при сложении двух полей, называется **интерференцией**, а **интерферограмма** – это картина, наблюдаемая при интерференции.

#### Сложение когерентных полей

**Когерентные поля** характеризуются тем, что разность фаз (эйконалов) двух полей остается постоянной за время инерции приемника.

В этом случае суммарная интенсивность определяется выражением (1.4.2), а картина распределения интенсивности представляет собой чередование темных и светлых полос, конфигурация которых зависит от изменения разности фаз  $\Delta\varphi$ .

Введем понятие **референтного (эталонного) поля**, которое имеет известную картину фаз. При сравнении с ним выявляются параметры другого поля (интенсивность и фаза). Регистрируемая картина взаимодействия двух полей, одно из которых референтное, называется **голограммой**. Голограмма – это запись полной информации о поле, то есть его комплексной амплитуды. Интерферограмма и голограмма – способы записи комплексной амплитуды поля путем сравнения его с эталонным полем.

## Сложение некогерентных полей

Если разность фаз полей меняется случайным образом много раз за время регистрации, то поля являются **некогерентными**. При регистрации суммарной интенсивности ее значения по времени усредняются:

$$\overline{I_{\Sigma}} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + 2\sqrt{\overline{I_1 I_2}} \cdot \overline{\cos(\Delta\varphi)} \quad (1.4.4)$$

В выражении (1.4.4)  $I_1$  и  $I_2$  – постоянны, их можно не усреднять, а  $\overline{\cos(\Delta\varphi)} = 0$ , тогда, получим выражение для сложения двух некогерентных полей:

$$\| I_{\Sigma} = I_1 + I_2 \quad (1.4.5)$$

### 1.4.3. Квазимонохроматическое и полихроматическое поле

Поле, излучаемое реальными источниками света, не бывает строго монохроматическим. Оно бывает лишь очень близким к полной монохроматичности, то есть квазимонохроматическим. Полихроматическое поле  $U(\mathbf{r}, t)$  можно считать суммой (суперпозицией) монохроматических составляющих, а интенсивность такого суммарного поля вычислять следующим образом:

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) \cdot S(\lambda) \cdot d\lambda \quad (1.4.6)$$

где  $I(\lambda)$  – распределение интенсивности монохроматической составляющей по длинам волн,  $S(\lambda)$  – весовая спектральная функция (например, спектральная чувствительность приемника),  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – реальные границы диапазона излучения.

На рис.1.4.1 показан пример графика распределения интенсивности и весовой спектральной функции.

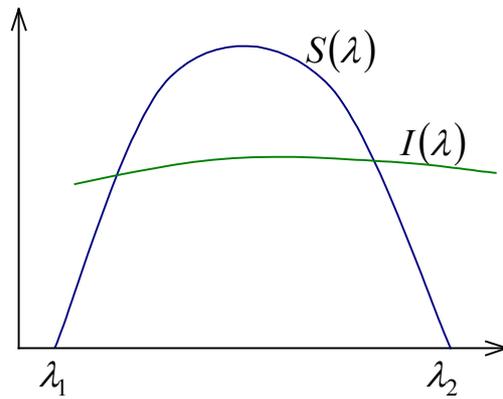


Рис.1.4.1. Интенсивность и весовая спектральная функция.

#### 1.4.4. Простейшие монохроматические волны

Рассмотрим два типа волн: плоские волны и сферические волны.

##### Плоские волны

**Плоские волны** (*plane waves*) называются так потому, что они имеют плоские волновые фронты (рис.1.4.2).

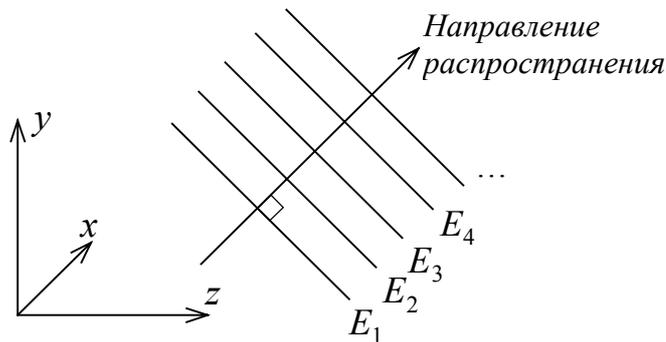


Рис.1.4.2. Плоские волны.

**Волновой фронт** – это поверхность в пространстве, на которой эйконал поля (или фаза) имеет одинаковые значения:

$$E(\mathbf{r}) = const \quad (1.4.7)$$

Различным значениям постоянной *const* соответствуют разные волновые фронты. Если менять *const*, то волновой фронт будет перемещаться в пространстве, переходя из одного состояния в другое. Поле распространяется в сторону увеличения *const*.

Направление распространения света перпендикулярно волновым фронтам, как показано на рис.1.4.2.

Длина вектора, показывающего направление, может быть выбрана различным образом:

- $\mathbf{S}$  – единичный вектор направления (орт),  $\|\mathbf{S}\| = 1$ ;
- $\mathbf{k}$  – волновой вектор,  $\|\mathbf{k}\| = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right) \cdot n$ , где  $k$  – волновое число;
- $\mathbf{q}$  – оптический лучевой вектор,  $\|\mathbf{q}\| = n$ ,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cos \alpha_x \\ n \cos \alpha_y \\ n \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – это направляющие косинусы (умноженные на показатель преломления среды косинусы углов между осями координат и направлением распространения). Составляющие лучевого вектора  $q_x$  и  $q_y$  называют также **пространственными частотами плоской волны**.

Все эти векторы ( $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{q}$ ) имеют одинаковое направление (в сторону распространения поля), но разную длину.

**Уравнение плоской волны** имеет следующий вид:

$$\| U(\mathbf{r}) = U_0 \cdot e^{ik_0 E(\mathbf{r})} \quad (1.4.9)$$

Для плоской волны амплитуда постоянна, меняется только эйконал, который можно записать как уравнение плоскости:

$$\| E(\mathbf{r}) = (\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = xX + yY + zZ \quad (1.4.10)$$

Из аналитической геометрии следует, что при таком описании эйконала волновой фронт плоский и перпендикулярен вектору распространения, то есть оптическому лучевому вектору  $\mathbf{q}$ . Плоские волны замечательны тем, что любое сложное поле можно представить в виде совокупности плоских волн. Поэтому эти волны являются универсальным базисом для описания световых полей.

### Сферические волны

**Сферические волны** (*spherical waves*) имеют волновой фронт в виде концентрических сфер (рис.1.4.3).

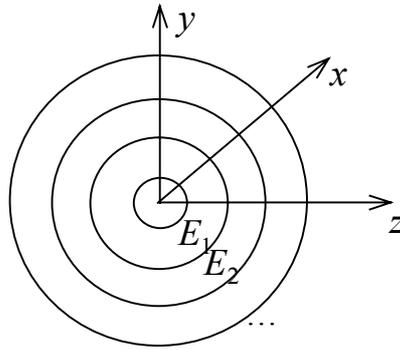


Рис.1.4.3. Сферические волны.

Поместим систему координат в центр, тогда получим следующие выражения для комплексной амплитуды и эйконала сферической волны.

**Уравнение сферической волны:**

$$U(\mathbf{r}) = \frac{U_0}{\|\mathbf{r}\|} \cdot e^{ik_0 E(\mathbf{r})} \quad (1.4.11)$$

**Уравнение эйконала сферической волны:**

$$E(\mathbf{r}) = n \cdot \|\mathbf{r}\| \quad (1.4.12)$$

где  $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  – это длина радиус-вектора точки в пространстве.

Сферические волны так же, как и плоские, могут быть использованы для представления сложных полей, кроме того, плоские волны можно считать частным случаем сферической волны с бесконечно малой кривизной волнового фронта.

## 2. Энергетика световых волн

### 2.1. Энергетические единицы и соотношения между ними

В оптике энергия излучения определяется за время намного большее, чем период собственных колебаний электромагнитных волн оптического диапазона. Ограничимся простой геометрической моделью, являющейся следствием уравнений Максвелла, согласно которой свет представляет собой поток лучистой энергии, распространяющейся вдоль геометрических лучей.

Электромагнитное поле в однородных изотропных средах переносит энергию  $E$  в направлении, которое указывается оптическим лучевым вектором  $\mathbf{q}$ .

Энергия измеряется в джоулях:  $[E] = Дж$ .

#### 2.1.1. Поток излучения

Основной величиной, которая позволяет судить о количестве излучения, является поток излучения (или мощность излучения):

**Поток излучения** (лучистый поток)  $\Phi_e$  – это величина энергии, переносимой полем в единицу времени через данную площадку (рис.2.1.1)

Поток излучения измеряется в ваттах:  $[\Phi_e] = Вт$ ,  $1 Вт = 1 \frac{Дж}{с}$ .

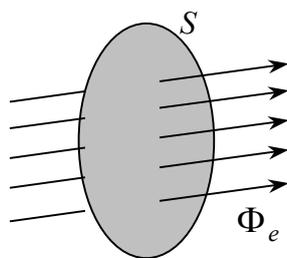


Рис. 2.1.1. Поток излучения.

Энергия зависит от спектрального состава света. Если разложить поле на монохроматические составляющие (каждая с определенной длиной волны), то вся энергия некоторым образом распределится между ними (рис.2.1.2).

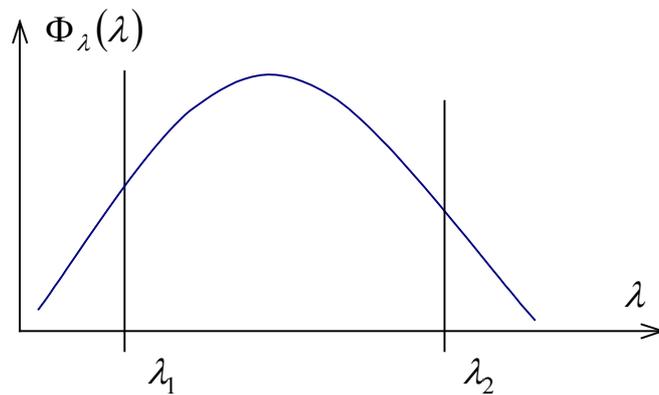


Рис.2.1.2. Спектральная плотность потока излучения.

**Спектральная плотность потока излучения**  $\Phi_\lambda(\lambda)$  – это функция, показывающая распределение энергии по спектру излучения:

$$\Phi_\lambda(\lambda) = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \lambda} \quad (2.1.1)$$

Тогда общий суммарный поток для всех длин волн в диапазоне от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$  будет вычисляться как интеграл:

$$\Phi_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (2.1.2)$$

### 2.1.2. Поверхностная плотность потока энергии (освещенность, светимость)

**Поверхностная плотность потока энергии**  $E_e$  – это величина потока, приходящегося на единицу площади:

$$E_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial S}, \left[ \frac{Вт}{м^2} \right] \quad (2.1.3)$$

Если площадка *освещается* потоком, то поверхностная плотность потока энергии будет иметь смысл **энергетической освещенности** или **облученности**  $E_e$ . Если поток *излучается* площадкой, то поверхностная плотность потока энергии будет иметь смысл **энергетической светимости**  $M_e$ .

**Спектральная плотность поверхностной плотности потока**  $E_{e\lambda}(\lambda)$  показывает распределение светимости или освещенности по спектру излучения:

$$E_{e\lambda}(\lambda) = \frac{\partial E_e}{\partial \lambda} \quad (2.1.4)$$

### 2.1.3. Сила излучения

Рассмотрим излучение точечного источника в пределах некоторого телесного угла  $\Omega$  (рис.2.1.3):

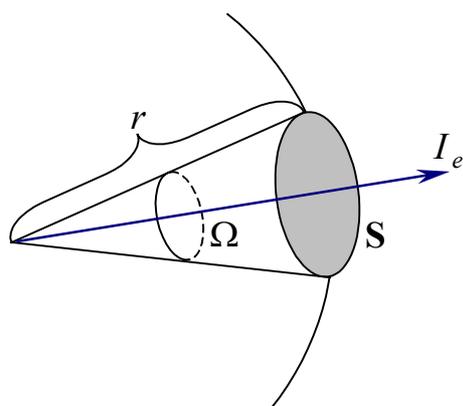


Рис.2.1.3. Энергетическая сила света.

**Телесный угол** данного конуса равен отношению площади  $S$  поверхности, вырезанной на сфере конусом, к квадрату радиуса  $r$  сферы.

$$\Omega = \frac{S}{r^2}, [ср] \quad (2.1.5)$$

Телесный угол измеряется в стерadians (в сфере  $4\pi$  ср).

**Сила излучения (энергетическая сила света)** – это поток излучения, приходящийся на единицу телесного угла, в пределах которого он распространяется:

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}, \left[ \frac{Вт}{ср} \right] \quad (2.1.6)$$

За единицу энергетической силы света приняты сила излучения такого точечного источника, у которого в пределах 1стерадиана равномерно распределяется поток излучения в 1ватт.

Энергетическая сила света – величина, имеющая направление. За направление силы света принимают ось телесного угла, в пределах которого распространяется поток излучения.

Поток называется равномерным, если в одинаковые телесные углы, выделенные по какому-либо направлению, излучается одинаковый поток. В случае неравномерного потока для определения силы света в каком-то направлении надо выделить элементарный телесный угол  $d\Omega$  вдоль данного направления и измерить световой поток  $d\Phi_e$ , приходящийся на этот телесный угол:

$$I_e = \frac{\partial \Phi_e}{\partial \Omega} \quad (2.1.7)$$

Для неравномерного потока существует понятие **средней сферической силы света**:

$$I_e = \frac{\Phi_e}{4\pi} \quad (2.1.8)$$

**Спектральная плотность силы излучения** показывает распределение силы излучения по спектру:

$$I_{e\lambda}(\lambda) = \frac{\partial I_e}{\partial \lambda} \quad (2.1.9)$$

#### 2.1.4. Энергетическая яркость

Яркость определяет поверхностно-угловую плотность потока излучения. Яркость является характеристикой протяженного источника, в то время как сила излучения является характеристикой точечного источника.

|| **Энергетическая яркость** – это величина потока, излучаемого единицей площади в единицу телесного угла в данном направлении.

Если излучающая площадка  $dS$  перпендикулярна направлению излучения, то энергетическая яркость определяется следующим образом:

$$L_e = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \Omega \partial S}, \left[ \frac{Вт}{ср \cdot м^2} \right] \quad (2.1.10)$$

За единицу энергетической яркости принимают яркость плоской поверхности в  $1 м^2$ , которая в перпендикулярном направлении имеет энергетическую силу света в  $1 Вт/ср$ .

В общем случае:

$$L_e = \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \Omega \partial S \cos \theta} \quad (2.1.11)$$

где  $\theta$  – угол между направлением излучения и нормалью к площадке (рис.2.1.4).

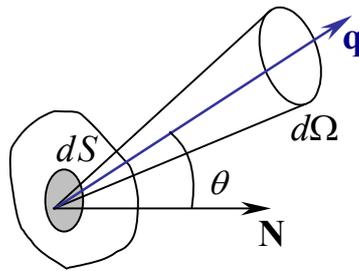


Рис.2.1.4. Энергетическая яркость.

**Спектральная плотность энергетической яркости** показывает распределение энергетической яркости по спектру:

$$L_{e\lambda}(\lambda) = \frac{\partial L_e}{\partial \lambda} \quad (2.1.12)$$

### 2.1.5. Инвариант яркости вдоль луча

Яркость постоянна (инвариантна) вдоль луча при отсутствии потерь энергии:

$$L_e = const$$

Если среда неоднородна (показатель преломления меняется), то используется **приведенная яркость (инвариант яркости)**:

$$\frac{L_e}{n^2} = const \quad (2.1.13)$$

Из инварианта яркости вытекают два важных для геометрической оптики следствия:

- яркость является основной характеристикой передачи световой энергии оптической системой,
- оптическая система в принципе не может увеличивать яркость проходящего через нее излучения (она может лишь уменьшить яркость за счет поглощения или рассеяния света).

### 2.1.6. Поглощение света средой

Световой поток, распространяясь в оптической среде, частично поглощается.

**Энергетический коэффициент пропускания**  $\tau_e$  – это отношение энергетического светового потока  $\Phi'_e$ , пропущенного данным телом, к энергетическому потоку  $\Phi_e$ , упавшему на него ( $0 < \tau_e < 1$ ):

$$\tau_e = \frac{\Phi'_e}{\Phi_e} \quad (2.1.14)$$

Если среда поглощает, то инвариант яркости вдоль луча выглядит следующим образом:

$$\frac{L_e}{n^2 \tau} = const \quad (2.1.15)$$

**Спектральная плотность пропускания**  $\tau_{e\lambda}(\lambda)$  показывает распределение коэффициента пропускания по спектру.

**Оптическая плотность среды** – логарифм величины, обратной пропусканию:

$$D = \lg \frac{1}{\tau} = -\lg \tau \quad (2.1.16)$$

Таким образом, более оптически плотная среда сильнее поглощает.

## 2.2. Световые величины

Энергетические величины являются исчерпывающими с энергетической точки зрения, но они не позволяют количественно оценить визуальное восприятие излучения. Восприятие глазом излучения видимого диапазона определяется не только мощностью воспринимаемого излучения, но также зависит от его спектрального состава (так как глаз – селективный приемник излучения). Световые характеристики описывают, как энергию излучения воспринимает зрительная система глаза с учетом спектрального состава света.

### 2.2.1. Световые величины

Световые величины обозначаются аналогично энергетическим величинам, но без индекса.

Ф – световой поток

I – сила света

E – освещенность

M – светимость

L – яркость

У световых величин нет никакой спектральной плотности, так как глаз не может провести спектральный анализ.

#### Сила света:

Если в энергетических величинах исходная единица – это поток, то в световых величинах исходная единица – это сила света (так сложилось исторически). Сила света определяется аналогично энергетической силе света:

$$I = \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega}, [\text{кд}] \quad (2.2.1)$$

1 *кандела* – сила излучения эталона (эталонный излучатель или черное тело) при температуре затвердевания платины ( $\sim 2042^\circ \text{K}$ ) площадью  $1/60 \text{ см}^2$ .

**Абсолютно черное тело** – это тело, которое полностью поглощает падающую на него энергию. Модель абсолютно черного тела представляет собой полое тело, внутренняя поверхность которого выкрашена в черный цвет. Через небольшое отверстие поток излучения поступает внутрь тела, где в результате многократного отражения полностью поглощается (рис.2.2.1).

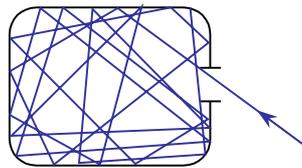


Рис.2.2.1. Абсолютно черное тело.

**Поток излучения:**

$$\Phi = I \cdot \Omega, [\text{лм}] \quad (2.2.2)$$

1 *люмен* – это поток, который излучается источником с силой света 1 *кд* в телесном угле 1 *ср*:  $1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} / \text{ср}$ .

**Освещенность:**

$$E = \frac{\partial \Phi}{\partial S}, [\text{лк}] \quad (2.2.3)$$

1 *люкс* – освещенность такой поверхности, на каждый квадратный метр которой равномерно падает поток в 1 *лм*.

**Светимость:**

$$[M] = \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}$$

За единицу светимости принимают светимость такой поверхности, которая излучает с  $1 \text{ м}^2$  световой поток, равный 1 *лм*.

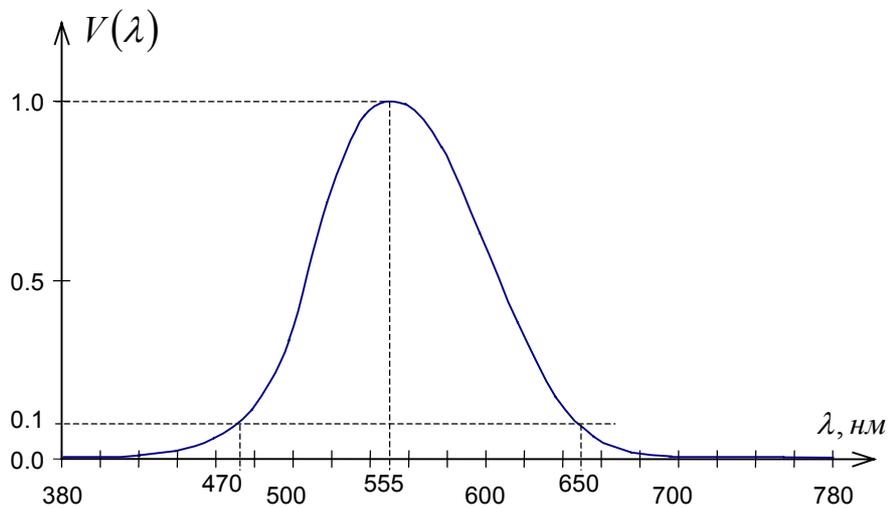
**Яркость:**

$$[L] = \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}$$

За единицу яркости принята яркость такой плоской поверхности, которая в перпендикулярном направлении излучает силу света 1 *кд* с  $1 \text{ м}^2$ .

### 2.2.2. Связь световых и энергетических величин

Связь световых и энергетических величин устанавливается через зрительное восприятие, которое хорошо изучено экспериментально. **Функция видности**  $V(\lambda)$  – это относительная спектральная кривая эффективности монохроматического излучения. Она показывает, как глаз воспринимает излучение различного спектрального состава.  $V(\lambda)$  – величина, обратно пропорциональная монохроматическим мощностям, дающим одинаковое зрительное ощущение, причем воздействие потока излучения с длиной волны  $\lambda = 555\text{ нм}$  условно принимается за единицу. Функция видности глаза максимальна в области желто-зеленого цвета (550–570 нм) и спадает до нуля для красных и фиолетовых лучей (рис.2.2.2).



2.2.2. Функция видности глаза.

Определить некую световую величину  $Q$  (поток, сила света, яркость, и т.д.), по спектральной плотности соответствующей ей энергетической величины  $Q_{e\lambda}(\lambda)$  можно по общей формуле:

$$Q = 680 \int_{0.38}^{0.77} V(\lambda) Q_{e\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.2.4)$$

где  $V(\lambda)$  – функция видности глаза, 680 – экспериментально установленный коэффициент (поток излучения мощностью 1 Вт с длиной волны  $\lambda = 555\text{ нм}$  соответствует 680 лм светового потока).

Например, **сила света:**

$$I = 680 \int_{0.38}^{0.77} V(\lambda) I_{e\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.2.5)$$

**яркость:**

$$L = 680 \int_{0.38}^{0.77} V(\lambda) L_{e\lambda}(\lambda) d\lambda \quad (2.2.6)$$

**Другие единицы измерения световых величин:**

сила света	1 свеча	1.0005 кд
яркость	1 нит = $10^{-4}$ стильб	1.0005 кд/м <sup>2</sup>
освещенность	1 люкс (старый)	1.0005 лк (новый)

**Сопоставление энергетических и световых единиц:**

Энергетические		Световые	
Наименование и обозначение	Единицы измерения	Наименование и обозначение	Единицы измерения
поток излучения $\Phi_e$	Вт	световой поток $\Phi$	лм
энергетическая сила света $I_e$	Вт/ср	сила света $I$	кд
энергетическая освещенность $E_e$	Вт/м <sup>2</sup>	освещенность $E$	лк
энергетическая светимость $M_e$	Вт/м <sup>2</sup>	светимость $M$	лм/м <sup>2</sup>
энергетическая яркость $L_e$	Вт/ср·м <sup>2</sup>	яркость $L$	кд/м <sup>2</sup>

### 2.2.3. Практические световые величины и их примеры

**Световая экспозиция.**

**Световая экспозиция** – это величина энергии, приходящейся на единицу площади за некоторое время (освещенность, накопленная за время от  $t_1$  до  $t_2$ ):

$$H = \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt, \text{ [лк} \cdot \text{с]} \quad (2.2.7)$$

Если освещенность постоянна, то экспозиция определяется выражением:

$$H = E \Delta t \quad (2.2.8)$$

**Блеск.**

Для протяженного источника характеристика, воспринимаемая глазом – яркость. Для точечного источника характеристика, воспринимаемая глазом – блеск (чем больше блеск, тем больше кажется яркость). Блеск – это величина, применяемая при визуальном наблюдении точечного источника света.

**Блеск**  $E_M$  – это освещенность, создаваемая точечным источником в плоскости зрачка наблюдателя,  $[E_M] = \text{лк}$ .

Видимый блеск небесных тел оценивается в **звездных величинах**  $m$ . Шкала звездных величин устанавливается следующим экспериментальным соотношением:

$$m = -2.5 \cdot \lg E_M - 13.89 \quad (2.2.9)$$

Чем меньше звездная величина, тем больше блеск. Например:

$E_1 = 1.11 \cdot 10^{-6} \text{ лк}$  – блеск, создаваемый звездой первой величины;

$E_2 = 1.75 \cdot 10^{-7} \text{ лк}$  – блеск, создаваемый звездой второй величины.

**Яркость некоторых источников,  $\text{кд}/\text{м}^2$ :**

$1.5 \cdot 10^9$  – поверхность солнца,

$2.5 \cdot 10^3$  – поверхность луны,

$1.5 \cdot 10^3$  – ясное небо,

$5 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^7$  – нить лампы накаливания,

$10^{-4}$  – ясное безлунное ночное небо,

$10^{-6}$  – наименьшая различимая глазом яркость.

**Освещенность, лк:**

$10^5$  – освещенность, создаваемая солнцем на поверхности Земли (летом, днем, при безоблачном небе),

$10^2 - 5 \cdot 10^3$  – освещенность рабочего места,

0.2 – освещенность от полной луны,

$10^{-9}$  – порог блеска (примерно 8-ая звездная величина).

### 2.3. Модели источников излучения

**Источник излучения** – это некоторая поверхность, излучающая энергию.

Общими характеристиками источника излучения являются:

- Поток излучения.
- Диаграмма силы света (фотометрическое тело силы света) – показывает распределение силы света в пространстве (рис.2.3.1). Сила света зависит от двух углов во взаимно перпендикулярных направлениях:  $I(\varphi, \theta)$ .

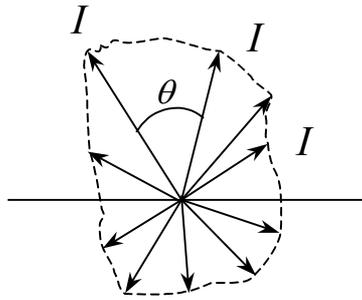


Рис.2.3.1. Диаграмма силы света.

- Яркость  $L(x, y, \varphi, \theta)$  – наиболее полная характеристика, где  $x, y$  – координаты на поверхности источника,  $\varphi, \theta$  – углы в полярных координатах.

Введем систему координат (рис.2.3.2), где  $\mathbf{r}(x, y, z)$  – линейный вектор,  $\mathbf{q}(X, Y, Z)$  – угловой вектор.

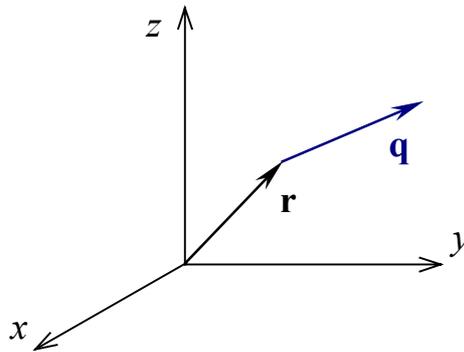


Рис. 2.3.2. Система координат.

Полная модель источника определяется спектральной плотностью энергетической яркости  $L_{e\lambda}(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \lambda)$ , зависящей от линейного вектора  $\mathbf{r}$  и углового вектора  $\mathbf{q}$ .

**Ламбертовский излучатель** – это такой излучатель, у которого яркость постоянна и не зависит от направления (то есть не зависит от положения точки на поверхности и от угла наблюдения).

На практике любая хорошо рассеивающая поверхность может считаться ламбертовским излучателем (белая матовая бумага, шероховатые поверхности металлов, поверхность только что выпавшего снега, и т.д.).

### 2.3.1. Плоский ламбертовский излучатель

Плоский ламбертовский излучатель – бесконечно тонкий плоский диск. Диаграмма распределения силы света от такого источника имеет вид окружности (рис. 2.3.3).

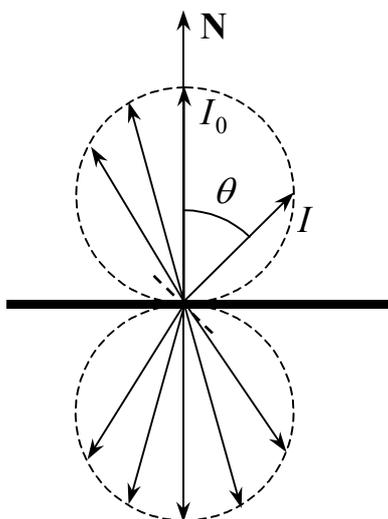


Рис. 2.3.3. Плоский ламбертовский излучатель.

Силу света от такого источника можно вычислить, зная яркость источника:

$$I = LS = LS_0 \cos \theta = I_0 \cos \theta$$

где  $S$  – проекция источника на плоскость, перпендикулярную направлению излучения,  $S_0$  – источник,  $I_0$  – сила света в направлении нормали к поверхности,  $\theta$  – угол между рассматриваемым направлением и нормалью.

#### Закон Ламберта (закон косинусов):

Плоская поверхность, имеющая одинаковую яркость по всем направлениям, излучает свет, сила которого изменяется по закону косинуса:

$$I = I_0 \cos \theta \tag{2.3.1}$$

#### 2.3.2. Сферический ламбертовский излучатель

Диаграмма распределения силы света от сферического ламбертовского излучателя имеет вид окружности (рис.2.3.4).

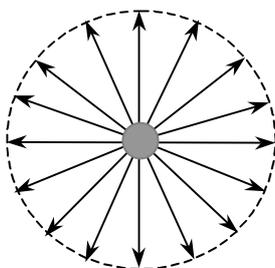


Рис. 2.3.4. Сферический ламбертовский излучатель.

Сила света от сферического ламбертовского источника постоянна во всех направлениях:

$$I = I_0 = const \quad (2.3.2)$$

## 2.4. Поток от излучателей различной формы

Вырежем на поверхности сферы единичного радиуса с центром в источнике элементарную площадку  $dS$  и телесный угол –  $d\Omega$  (рис.2.4.1):

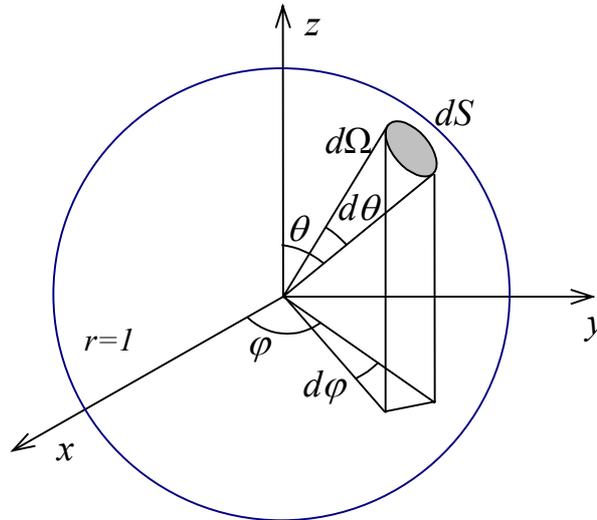


Рис. 2.4.1. Телесный угол в полярных координатах.

Выразим телесный угол  $d\Omega$  через углы  $d\varphi$  и  $d\theta$ :

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \frac{(r \cdot d\theta)(r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi)}{r^2} = \frac{r^2 \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi}{r^2} = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

$$d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (2.4.1)$$

Поток, проходящий через площадку  $dS$ :

$$d\Phi = I \cdot d\Omega$$

Тогда общий поток от произвольного излучателя в произвольном телесном угле:

$$\Phi = \iint_{\Omega_0} I(\varphi, \theta) d\Omega = \iint_{\Omega_0} I(\varphi, \theta) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \quad (2.4.2)$$

### 2.4.1. Сферический ламбертовский излучатель

Для сферического ламбертовского излучателя сила света постоянна во всех направлениях:  $I(\varphi, \theta) = I_0 = const$ .

Поток в телесном угле  $\Omega_0$  определяется из выражения (2.4.2):

$$\Phi = \iint_{\Omega_0} I(\varphi, \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = I_0 \iint_{\Omega_0} d\Omega = I_0 \iint_{\Omega_0} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = I_0 \Omega_0 \quad (2.4.3)$$

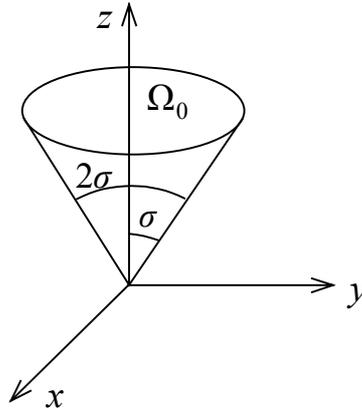


Рис.2.4.2. Телесный угол, получаемый вращением плоского угла.

Найдем телесный угол  $\Omega_0$ , определяемый плоским углом  $2\sigma$  (рис.2.4.2):

$$\Omega_0 = \int_0^{\sigma} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = 2\pi \int_0^{\sigma} \sin \theta \cdot d\theta = 2\pi \left( -\cos \theta \Big|_0^{\sigma} \right) = 2\pi(1 - \cos \sigma) = 4\pi \sin^2 \frac{\sigma}{2}$$

Таким образом, телесный угол, который получается вращением плоского угла можно выразить следующим образом:

$$\Omega_0 = 4\pi \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad (2.4.4)$$

Тогда полный поток от сферического ламбертовского излучателя в телесном угле  $\Omega_0$  определяется выражением:

$$\Phi = I_0 \Omega_0 = 4\pi I_0 \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad (2.4.5)$$

#### 2.4.2. Плоский ламбертовский излучатель

Для плоского ламбертовского излучателя сила света не постоянна ( $I = I_0 \cos \theta$ ), следовательно:

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\Omega_0} I_0 \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{I_0}{2} \int_0^{\sigma} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \pi I_0 \int_0^{\sigma} \sin 2\theta \cdot d\theta = \\ &= \frac{\pi I_0}{2} \left( -\cos 2\theta \Big|_0^{\sigma} \right) = \frac{\pi I_0}{2} (1 - \cos 2\sigma) = \pi I_0 \sin^2 \sigma \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Таким образом, полный поток от плоского ламбертовского излучателя в телесном угле  $\Omega_0$ , определяемым плоским углом  $2\sigma$ , можно выразить следующим образом:

$$\Phi = \pi I_0 \sin^2 \sigma \quad (2.4.7)$$

При малых углах выражения (2.4.5) и (2.4.7) для потока излучения сферического и плоского источников дают одинаковый результат.

### 2.5. Яркость рассеивающей поверхности

Рассмотрим **ламбертовское рассеяние**: рассеяние света плоской поверхностью происходит по всем направлениям, и не зависит от телесного угла, в пределах которого падает световой поток. Световой поток выходит после такого рассеивателя равномерно распределенным в пределах телесного угла  $2\pi$ . Примером может служить белая бумага или молочное стекло. Яркость такой поверхности постоянна по всем направлениям и не зависит от направления падающего света, то есть полностью подчиняется закону Ламберта. Кривая распределения силы света таких поверхностей имеет форму окружности (рис.2.5.1).

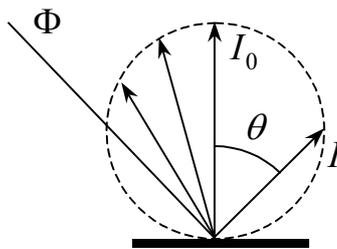


Рис.2.5.1. Ламбертовское рассеяние.

Часть падающего потока  $\Phi$  поглощается поверхностью, и рассеивается поток  $\Phi'$ :

$$\Phi' = \alpha \Phi \quad (2.5.1)$$

**Коэффициент альbedo**  $\alpha$  определяет степень белизны поверхности ( $0 < \alpha < 1$ ). У абсолютно черного тела  $\alpha = 0$  (ничего не рассеивает, все поглощает), у абсолютно белого тела  $\alpha = 1$  (все рассеивает, ничего не поглощает)

#### Альbedo некоторых поверхностей:

$\alpha = 0.85 - 0.95$  – очищенный мел,

$\alpha = 0.7 - 0.8$  – белая бумага для рисования,

$\alpha = 0.78$  – свежесвыпавший снег,

$\alpha = 0.25 - 0.3$  – песок,

$\alpha = 0.01 - 0.002$  – черный бархат.

Найдем яркость рассеивателя. Поток  $\Phi$  создает освещенность  $E = \frac{\Phi}{dS}$ ,

следовательно, поток, упавший на рассеиватель:

$$\Phi = E \cdot dS \quad (2.5.2)$$

Рассеянный поток в полусфере:

$$\Phi' = I_0 \pi = L dS \pi \quad (2.5.3)$$

$\Phi' = \alpha \Phi$ , следовательно:

$$L dS \pi = \alpha \cdot (E dS)$$

Отсюда яркость идеального рассеивателя:

$$L = \frac{\alpha E}{\pi} \quad (2.5.4)$$

где  $E$  – освещенность, создаваемая падающим потоком,  $\alpha$  – коэффициент Альбеда.

## 2.6. Освещенность, создаваемая различными источниками (закон обратных квадратов)

### 2.6.1. Освещенность, создаваемая точечным источником

Рассмотрим точечный источник.

**Точечный источник** – это источник, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до него, и который излучает поток, равномерный по всем направлениям.

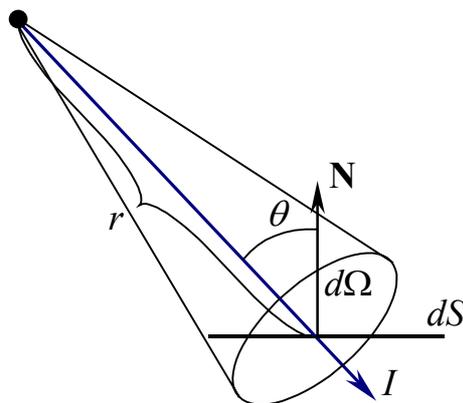


Рис.2.6.1. Освещенность, создаваемая точечным источником.

Освещенность площадки  $dS$ , создаваемая точечным источником:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{I d\Omega}{dS} = \frac{I \cos \theta}{r^2}$$

### Закон обратных квадратов:

Освещенность, создаваемая точечным источником обратно пропорциональна расстоянию от источника до поверхности и прямо пропорционально косинусу угла, между направлением светового потока и нормалью к освещаемой поверхности:

$$E = \frac{I \cos \theta}{r^2} \quad (2.6.1)$$

где  $I$  – сила света источника в направлении освещаемой точки.

Практические измерения показывают, что для соблюдения закона обратных квадратов отношение размера источника к расстоянию до него должно быть меньше 0.1.

#### 2.6.2. Освещенность от протяженного ламбертовского источника

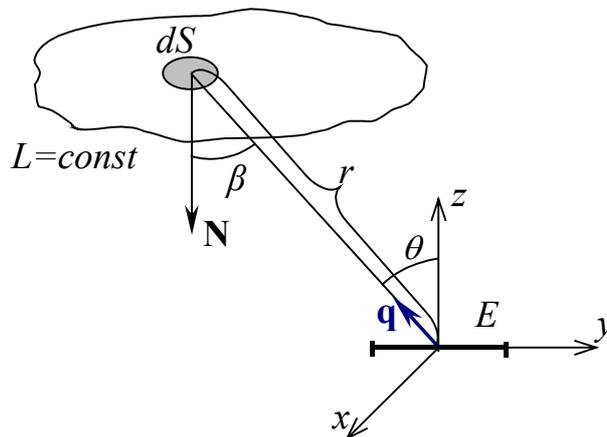


Рис.2.6.2 Освещенность от протяженного ламбертовского источника.

Для протяженного источника можно разбить поверхность источника на элементарные площадки  $dS$  (рис.2.6.2) и определить освещенность, создаваемой каждой из них по закону обратных квадратов (2.6.1):

$$dE = \frac{dI \cos \theta}{r^2} = \frac{L dS \cos \beta \cos \theta}{r^2} = L \cos \beta \cos \theta d\Omega \quad (2.6.2)$$

Проинтегрируем теперь элементарную освещенность по всей площади источника:

$$E = \iint_{\Omega} L \cos \beta \cos \theta d\Omega \quad (2.6.3)$$

Так как у ламбертовского источника яркость постоянна по всем направлениям, ее можно вынести за интеграл:

$$E = L \iint_{\Omega} \cos \beta \cos \theta d\Omega \quad (2.6.4)$$

или

$$E = L \iint_{\Omega} dq_x dq_y = L \iint_{\Omega} dXdY \quad (2.6.5)$$

где  $\mathbf{q}$  – орт направления на источник;  $q_x = X = \cos \alpha_x$ ,  $q_y = Y = \cos \alpha_y$  – направляющие косинусы.

Можно показать, что выражения (2.6.4) и (2.6.5) эквивалентны, если учесть, что  $dq_x = -\sin \alpha_x d\alpha_x$ ,  $dq_y = -\sin \alpha_y d\alpha_y$ ,  $d\alpha_x d\alpha_y = d\Omega$ , а углы  $\beta$  и  $\theta$  являются дополнительными к  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ .

### 3. Прохождение света через границу раздела двух сред

#### 3.1. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред

Рассмотрим падение плоской волны на границу, разделяющую две прозрачные однородные диэлектрические среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . Будем считать, что граница представляет собой плоскость (так как в пределах бесконечно малой области любую поверхность можно считать плоской). Будем также считать, что сама граница раздела свет не поглощает.

После прохождения границы раздела двух сред падающая плоская волна (луч  $i$ ) разделяется на две волны: проходящую во вторую среду (луч  $t$ ) и отраженную (луч  $r$ ) (рис.3.1.1).

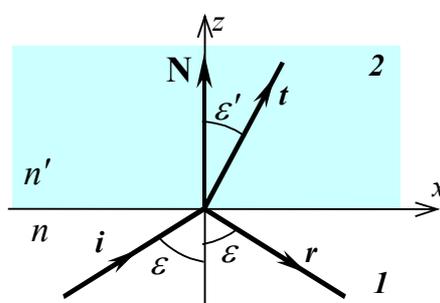


Рис.3.1.1. Преломление и отражение света на границе двух сред.

На рис.3.1.1  $\mathbf{N}$  – вектор нормали к поверхности в точке падения единичной длины ( $\|\mathbf{N}\|=1$ ). Поместим начало координат в точку падения. Определим следующие величины:

**Угол падения  $\varepsilon$**  – это угол между лучом  $i$ , падающим на преломляющую или отражающую поверхность, и нормалью  $\mathbf{N}$  к поверхности в точке падения.

**Угол преломления  $\varepsilon'$**  – это угол между преломленным лучом  $t$  и нормалью  $\mathbf{N}$  к поверхности в точке преломления.

**Угол отражения  $\varepsilon$**  – это угол между отраженным лучом  $r$  и нормалью  $\mathbf{N}$  к поверхности в точке отражения.

#### 3.1.1. Закон преломления

После прохождения светом границы раздела двух сред необходимо определить направление распространения преломленной волны  $t$  и отраженной волны  $r$ , и распределение энергии между отраженной и преломленной волной.

В соответствии с уравнением плоской волны (1.4.9) запишем выражения для комплексных амплитуд падающей, отраженной и преломленной волн:

уравнение падающей плоской волны

$$U_i(\mathbf{r}) = U_i e^{ik_0(\mathbf{q}_i, \mathbf{r})} \quad (3.1.1)$$

уравнение преломленной плоской волны

$$U_t(\mathbf{r}) = U_t e^{ik_0(\mathbf{q}_t, \mathbf{r})} \quad (3.1.2)$$

уравнение отраженной плоской волны

$$U_r(\mathbf{r}) = U_r e^{ik_0(\mathbf{q}_r, \mathbf{r})} \quad (3.1.3)$$

где  $\mathbf{q}_i$ ,  $\mathbf{q}_r$ ,  $\mathbf{q}_t$  – оптические векторы падающей, отраженной и преломленной волн,  $k_0$  – волновое число,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор произвольной точки.

Здесь мы используем соотношения скалярной теории, поскольку закон преломления одинаков для векторных и скалярных волн.

Из уравнений падающей и преломленной плоской волны следует, что на границе раздела двух сред у падающей и преломленной волн амплитуды могут быть различны, но должны совпадать значения эйконолов (этого требует условие физической реализуемости, так как иначе волна будет иметь разрыв на границе раздела):

$$(\mathbf{q}_i, \mathbf{r}) = (\mathbf{q}_t, \mathbf{r}) \quad (3.1.4)$$

Равенство (3.1.4) соблюдается на границе раздела, то есть для всех  $\mathbf{r}$ , перпендикулярных вектору нормали. Таким образом, выражение (3.1.4) можно записать в виде:

$$(\mathbf{q}_t, \mathbf{r}) - (\mathbf{q}_i, \mathbf{r}) = 0 \text{ при } (\mathbf{r}, \mathbf{N}) = 0$$

или:

$$((\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_i), \mathbf{r}) = 0 \text{ при } (\mathbf{r}, \mathbf{N}) = 0$$

То есть  $(\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_i) \perp \mathbf{r}$ , если  $\mathbf{N} \perp \mathbf{r}$ . Выполнение этих условий возможно тогда и только тогда, когда  $(\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_i) \parallel \mathbf{N}$ . Таким образом, можно вывести формулировки закона преломления в векторной форме:

$$(\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_i) = \mathbf{N} \cdot \Gamma \quad (3.1.5)$$

где  $\Gamma$  – некоторый скаляр, или:

$$[(\mathbf{q}_t - \mathbf{q}_i) \times \mathbf{N}] = 0 \quad (3.1.6)$$

или:

$$\|\mathbf{q}_t \times \mathbf{N}\| = \|\mathbf{q}_i \times \mathbf{N}\| \quad (3.1.7)$$

Так как длина оптического вектора равна показателю преломления среды ( $\|\mathbf{q}_i\| = n$ ,  $\|\mathbf{q}_t\| = n'$ ), то из выражения (3.1.7) и определения векторного произведения можно вывести классический закон преломления Снеллиуса (*Snell law*).

### Закон преломления (*refraction law*):

качественная часть закона:

падающий луч, преломленный луч и нормаль к поверхности раздела двух сред в точке падения лежат в одной плоскости.

количественная часть закона:

произведение показателя преломления на синус угла между лучом и нормалью сохраняет свое значение при переходе в следующую среду:

$$n \cdot \sin \varepsilon = n' \cdot \sin \varepsilon' \quad (3.1.8)$$

Чтобы найти скаляр  $\Gamma$ , домножим скалярно выражение (3.1.5) на вектор нормали  $\mathbf{N}$ :

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{q}') - (\mathbf{N} \cdot \mathbf{q}) = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) \cdot \Gamma$$

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) = 1, \text{ следовательно } n' \cdot \cos \varepsilon' - n \cdot \cos \varepsilon = \Gamma$$

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{N} \cdot \Gamma \quad (3.1.9)$$

где  $\Gamma = n' \cdot \cos \varepsilon' - n \cdot \cos \varepsilon$ .

Величина  $\Gamma$  имеет большое значение в математическом аппарате расчета лучей (*ray tracing*) на компьютере.

### 3.1.2. Закон отражения

Закон отражения можно вывести в векторной форме аналогично закону преломления, подставив вместо оптического вектора преломленного луча  $\mathbf{q}_t$  оптический вектор отраженного луча  $\mathbf{q}_r$  (рис.3.1.2).

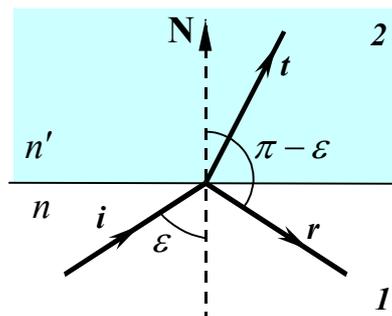


Рис.3.1.2. Отражение света на границе двух сред.

### Закон отражения (*reflection law*):

$$\sin(\pi - \varepsilon) = -\sin \varepsilon \quad (3.1.10)$$

Закон отражения можно вывести как частный случай закона преломления при  $n' = -n$  (это просто прием для удобства расчета лучей в геометрической оптике, в отрицательном значении показателя преломления нет никакого физического смысла). Тогда случай отражения можно не выделять, а включать его в закон преломления при условии, что  $n' = -n$  (рис.3.1.3).

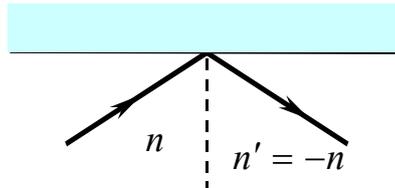


Рис.3.1.3. Отражение света на границе двух сред.

$$(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_i) = \mathbf{N} \cdot \Gamma \quad (3.1.11)$$

Величина  $\Gamma$  в таком случае будет равна:

$$\Gamma = -2n \cdot \cos \varepsilon \quad (3.1.12)$$

### 3.1.3. Полное внутреннее отражение

Если угол падения  $\varepsilon$  невелик, то часть поля отражается, а часть преломляется. Однако, при переходе из более плотной среды в менее плотную ( $n > n'$ ), при некотором угле падения синус угла преломления по закону преломления должен быть больше единицы, что невозможно. Поэтому в таком случае преломления не происходит, а происходит полное внутреннее отражение (*ПВО, entire inner reflection*) (рис.3.1.4):

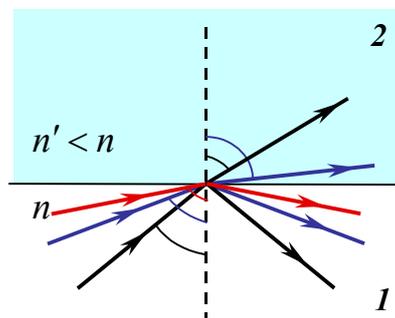


Рис.3.1.4. Полное внутреннее отражение.

### Условие полного внутреннего отражения:

$$\sin \varepsilon \geq \frac{n'}{n} \quad (3.1.13)$$

Явление ПВО широко используется в оптической технике благодаря тому, что при ПВО отражается 100% энергии, то есть потерь энергии нет. Таким образом, ПВО позволяет решить задачу полного отражения света: в зависимости от угла падения луч или почти полностью проходит, или почти полностью отражается.

Нарушенное полное внутреннее отражение (НПВО), которое возникает при оптическом контакте границы раздела со средой, используется в спектроскопии.

### 3.2. Формулы Френеля. Соотношение между амплитудами падающих, преломленных и отраженных волн

При выводе законов преломления и отражения (параграф 3.1) не принимались во внимание энергетические соотношения между падающим, преломленным и отраженным лучами. Для учета этих соотношений необходимо использование векторного описания падающего поля.

#### 3.2.1. Формулы Френеля

Рассмотрим, какое количество света преломляется, а какое отражается, в зависимости от угла падения и показателей преломления сред. Эта задача была решена в первой половине XIX века Френелем (*Fresnel*).

Рассмотрим границу раздела двух сред с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . Разложим электрический вектор падающей плоской волны  $\mathbf{E}^{(i)}$  на две составляющих: одна лежит в плоскости падения ( $A_{\parallel}$ ), другая перпендикулярна плоскости падения (и плоскости рисунка) ( $A_{\perp}$ ) (рис.3.2.1).

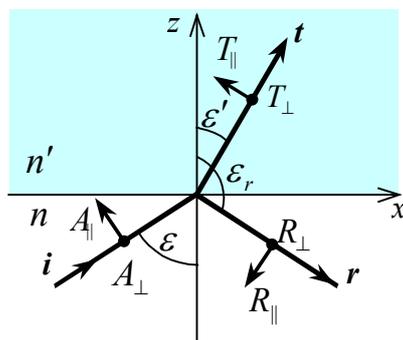


Рис.3.2.1. Отражение и преломление плоской волны. Формулы Френеля.

Тогда компоненты электрического вектора поля падающей плоской волны запишутся в виде:

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} &= -A_{\parallel} \cos \varepsilon \\ E_y^{(i)} &= A_{\perp} \\ E_z^{(i)} &= A_{\parallel} \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{E}$ , то его компоненты можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} H_x^{(i)} &= -A_{\perp} n \cos \varepsilon \\ H_y^{(i)} &= -A_{\parallel} \cdot n \\ H_z^{(i)} &= A_{\perp} n \sin \varepsilon \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Аналогично можно разложить комплексную амплитуду отраженной волны  $R$  и преломленной волны  $T$  на параллельную и перпендикулярную составляющие.

Тогда поле прошедшей волны:

$$\begin{aligned} E_x^{(t)} &= -T_{\parallel} \cos \varepsilon' & H_x^{(t)} &= -T_{\perp} n' \cos \varepsilon' \\ E_y^{(t)} &= T_{\perp} & H_y^{(t)} &= -T_{\parallel} \cdot n' \\ E_z^{(t)} &= T_{\parallel} \sin \varepsilon' & H_z^{(t)} &= T_{\perp} n' \sin \varepsilon' \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Поле отраженной волны:

$$\begin{aligned} E_x^{(r)} &= -R_{\parallel} \cos \varepsilon_r & H_x^{(r)} &= -R_{\perp} n \cos \varepsilon_r \\ E_y^{(r)} &= R_{\perp} & H_y^{(r)} &= -R_{\parallel} \cdot n \\ E_z^{(r)} &= R_{\parallel} \sin \varepsilon_r & H_z^{(r)} &= R_{\perp} n \sin \varepsilon_r \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

На границе раздела двух сред не должно быть разрывов функций, то есть тангенциальные составляющие векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (х- и у- составляющие, лежащие в плоскости границы раздела) должны быть непрерывны, что следует из уравнений Максвелла (1.2.1), и, следовательно, должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} E_x^{(i)} + E_x^{(r)} &= E_x^{(t)} & H_x^{(i)} + H_x^{(r)} &= H_x^{(t)} \\ E_y^{(i)} + E_y^{(r)} &= E_y^{(t)} & H_y^{(i)} + H_y^{(r)} &= H_y^{(t)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Эти уравнения описывают непрерывность тангенциальных (лежащих в плоскости границы) компонент электрического и магнитного полей, если поглощения на границе нет.

Подставив в (3.2.5) значения всех компонент, и учитывая, что  $\cos \varepsilon_r = \cos(\pi - \varepsilon) = -\cos \varepsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon (A_{\parallel} - R_{\parallel}) &= \cos \varepsilon' T_{\parallel} \\ A_{\perp} + R_{\perp} &= T_{\perp} \\ n \cos \varepsilon (A_{\perp} - R_{\perp}) &= n' \cos \varepsilon' T_{\perp} \\ n(A_{\parallel} + R_{\parallel}) &= n' T_{\parallel} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Можно решить уравнения (3.2.6) относительно компонент отраженной и прошедшей волн, выразив их через компоненты падающей волны. После преобразований получим **формулы Френеля**, для амплитуд прошедшей  $T_{\parallel}$ ,  $T_{\perp}$  и отраженной  $R_{\parallel}$ ,  $R_{\perp}$  волн соответственно:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2n \cos \varepsilon}{n' \cos \varepsilon + n \cos \varepsilon'} A_{\parallel} \\ T_{\perp} &= \frac{2n \cos \varepsilon}{n' \cos \varepsilon' + n \cos \varepsilon} A_{\perp} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{n' \cos \varepsilon - n \cos \varepsilon'}{n' \cos \varepsilon + n \cos \varepsilon'} A_{\parallel} \\ R_{\perp} &= \frac{n \cos \varepsilon - n' \cos \varepsilon'}{n \cos \varepsilon + n' \cos \varepsilon'} A_{\perp} \end{aligned} \right. \quad (3.2.7)$$

Пользуясь законом преломления (3.1.8 – 3.1.9), из этих формул можно исключить показатели преломления  $n$  и  $n'$ :

$$\left\{ \begin{aligned} T_{\parallel} &= \frac{2 \sin \varepsilon' \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \cos(\varepsilon - \varepsilon')} A_{\parallel} \\ T_{\perp} &= \frac{2 \sin \varepsilon' \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')} A_{\perp} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} R_{\parallel} &= \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon - \varepsilon')}{\operatorname{tg}(\varepsilon + \varepsilon')} A_{\parallel} \\ R_{\perp} &= -\frac{\sin(\varepsilon - \varepsilon')}{\sin(\varepsilon + \varepsilon')} A_{\perp} \end{aligned} \right. \quad (3.2.8)$$

### 3.2.2. Распределение энергии между отраженным и преломленным полями

Рассмотрим теперь, как энергия поля падающей волны распределяется между отраженным и преломленным полями. Для этого можно использовать интенсивности падающей, прошедшей и отраженной волн, определяемые через квадраты их амплитуд:

$$\begin{aligned} I_i &\sim A^2 \cdot (\cos \varepsilon \cdot n)^2 \\ I_t &\sim T^2 \cdot (\cos \varepsilon' \cdot n')^2 \\ I_r &\sim R^2 \cdot (\cos \varepsilon \cdot n)^2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

**Коэффициент отражения**  $\rho$  показывает, какая часть энергии отражается по отношению к падающей:

$$\rho = \frac{R^2 (n \cos \varepsilon)^2}{A^2 (n \cos \varepsilon)^2} = \frac{R^2}{A^2} \quad (3.2.10)$$

**Коэффициент пропускания**  $\tau$  показывает, какая часть энергии проходит по отношению к падающей:

$$\tau = \frac{(n' \cos \varepsilon')^2}{(n \cos \varepsilon)^2} \cdot \frac{T^2}{A^2} \quad (3.2.11)$$

В сумме коэффициенты отражения и пропускания равны единице:

$$\rho + \tau = 1 \quad (3.2.12)$$

Коэффициенты отражения и пропускания зависят от направления поляризации падающей волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon - \varepsilon')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon + \varepsilon')} \\ \rho_{\perp} = \frac{\sin^2(\varepsilon - \varepsilon')}{\sin^2(\varepsilon + \varepsilon')} \end{array} \right. \quad (3.2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{\parallel} = \frac{\sin^2 \varepsilon + \sin(\varepsilon - \varepsilon')}{\sin^2(\varepsilon + \varepsilon') \cos^2(\varepsilon - \varepsilon')} \\ \tau_{\perp} = \frac{\sin^2 \varepsilon + \sin(\varepsilon - \varepsilon')}{\sin^2(\varepsilon + \varepsilon')} \end{array} \right. \quad (3.2.14)$$

Отсюда следует, что при прохождении светом границы раздела двух сред его состояние поляризации изменяется.

### **3.3. Различные случаи падения и отражения света**

Математическое описание прохождения полем границы раздела двух сред имеет большое значение при проектировании оптических систем, где встречается ряд практически важных частных случаев. Ниже рассматриваются эти случаи, а также пример применения формул Френеля при создании средств, уменьшающих потери света на отражение.

#### **3.3.1. Нормальное падение**

При нормальном падении  $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ . Тогда коэффициент отражения определяется так:

$$\rho_{\perp} = \rho_{\parallel} = \rho = \left( \frac{n' - n}{n' + n} \right)^2 \quad (3.3.1)$$

Исходя из выражения (3.2.12), получим коэффициент пропускания:

$$\tau = \frac{4 \frac{n}{n'}}{\left( \frac{n}{n'} + 1 \right)^2} = \frac{4nn'}{(n' + n)^2} \quad (3.3.2)$$

Если граница раздела сред – стекло-воздух, то  $\rho \approx 0.04$ , то есть при нормальном падении света на стекло отражается около 4% энергии.

### 3.3.2. Угол Брюстера

Из выражения (3.2.13) следует, что при угле падения таком, что  $\varepsilon + \varepsilon' = \frac{\pi}{2}$ , коэффициент отражения параллельно поляризованного света  $\rho_{\parallel} = 0$ . Следовательно, при определенном угле падения свет при параллельной поляризации совсем не отражается, а отражается только ортогонально поляризованный свет (рис.3.3.1).

Угол, при котором происходит полная поляризация при отражении, называется **углом Брюстера**:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{n'}{n} \quad (3.3.3)$$

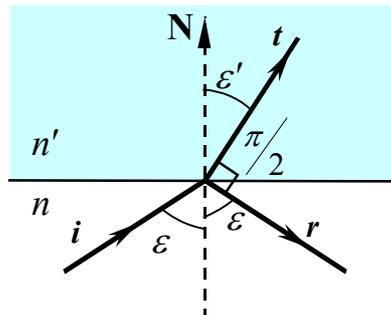


Рис.3.3.1. Угол Брюстера.

Можно наглядно показать различия зависимостей коэффициентов отражения света от границы раздела двух сред для двух случаев поляризации. Для этого строится график зависимости  $\rho_{TE}$  и  $\rho_{TM}$  от угла падения  $\varepsilon_i$  (рис.3.3.2). Индекс *TE* обозначает такое состояние поляризации света, при котором электрический вектор перпендикулярен плоскости падения ( $E_{\perp}$ ), а *TM* – состояние поляризации, при котором электрический вектор лежит в

плоскости падения ( $E_{\parallel}$ ). График показывает, что граница раздела двух сред оказывает наиболее сильное влияние на поляризацию падающего света для углов падения, близких к углу Брюстера. Это явление используется при создании специальных преобразователей светового поля – поляризаторов.

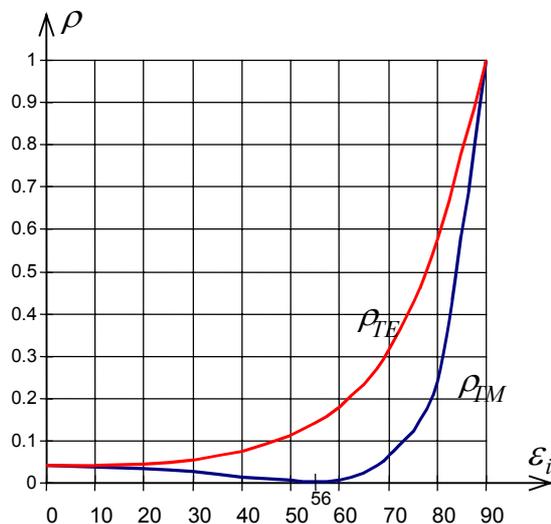


Рис.3.3.2. График зависимости коэффициентов отражения для TM и TE поляризованного света от угла падения  $\varepsilon_i$ .

### 3.3.3. Просветление оптики. Тонкие пленки

При прохождении света через сложные оптические системы с большим количеством оптических деталей на каждой поверхности теряется около 4% света. В результате через систему может пройти всего 20% светового потока. Применение тонкослойных пленок для ослабления френелевского отражения называется **просветлением оптики**. Просветляющие покрытия могут уменьшить отражение в 3-4 раза.

Принцип действия просветляющих покрытий основан на явлении интерференции. На поверхность оптической детали наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла  $n_{пл} < n_{ст}$ . Луч, отраженный от поверхности пленки, и луч, отраженный от границы пленка-стекло когерентны. Можно подобрать толщину пленки так, чтобы при интерференции они погасили бы друг друга, усиливая, таким образом, проходящий свет (рис.3.3.3).

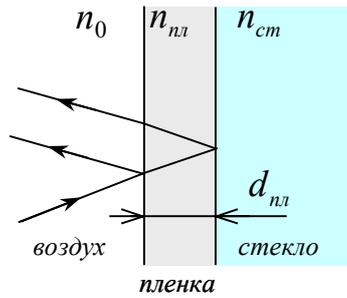


Рис.3.3.3. Просветление оптики.

Для этого, во-первых, амплитуды двух отраженных волн должны быть равны ( $\rho_1 = \rho_2$ ), и, во-вторых, фазы (эйконалы) должны отличаться на половину периода, чтобы лучи погасили друг друга ( $E_1 - E_2 = \frac{\lambda}{2}$  или  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ ). Для этого необходимо выполнение следующих условий:

$$n_{пл} = \sqrt{n_{ст}} \quad (3.3.4)$$

$$n_{пл} \cdot d_{пл} = \frac{\lambda}{4} \quad (3.3.5)$$

## 4. Геометрическая оптика

### 4.1. Приближение коротких длин волн. Уравнение эйконала

**Геометрическая оптика** – это раздел оптики, в котором считается, что длина волны пренебрежимо мала ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ). Основа геометрической оптики – это уравнение эйконала. Его можно получить из волнового уравнения для комплексной амплитуды (уравнения Гельмгольца) (1.3.26).

Вначале рассмотрим известные из математики тождества, справедливые для некоторой функции  $U$ , заданной в экспоненциальной форме  $U = e^{\beta(\mathbf{r})} = e^{\beta(x,y,z)}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = U \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U \frac{\partial \beta}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial x} + U \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = U \left[ \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right] \quad (4.1.2)$$

Таким образом:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = U \left[ (\nabla \beta)^2 + \nabla^2 \beta \right] \quad (4.1.3)$$

Пусть теперь  $U$  – это комплексная амплитуда, которая представлена в виде:

$$U = e^{\beta} = e^{[\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})]} \quad (4.1.4)$$

Тогда, применив преобразование (4.1.3), получим следующее выражение:

$$U \left\{ \left[ \nabla [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})] \right]^2 + \nabla^2 [\alpha(\mathbf{r}) + ik_0 E(\mathbf{r})] \right\} + k_0^2 n^2 U = 0 \quad (4.1.5)$$

отсюда:

$$(\nabla \alpha + ik_0 \nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + ik_0 \nabla^2 E + k_0^2 n^2 = 0 \quad (4.1.6)$$

В итоге получим следующее уравнение:

$$(\nabla \alpha)^2 + 2ik_0 \nabla E \nabla \alpha - k_0^2 (\nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + ik_0 \nabla^2 E + k_0^2 n^2 = 0 \quad (4.1.7)$$

или:

$$\left[ (\nabla \alpha)^2 - k_0^2 (\nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + k_0^2 n^2 \right] + i \left[ k_0 \nabla^2 E + 2k_0 \nabla E \nabla \alpha \right] = 0 \quad (4.1.8)$$

Поскольку в левой части уравнения (4.1.8) – комплексное число, то равенство нулю правой части предполагает равенство нулю как вещественной,

так и мнимой частей этого комплексного числа. Нас интересует вещественная часть:

$$(\nabla \alpha)^2 - k_0^2 (\nabla E)^2 + \nabla^2 \alpha + k_0^2 n^2 = 0 \quad (4.1.9)$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$(\nabla E)^2 - n^2 = \frac{1}{k_0^2} [(\nabla \alpha)^2 + \nabla^2 \alpha]$$

где  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , или:

$$(\nabla E)^2 - n^2 = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} [(\nabla \alpha)^2 + \nabla^2 \alpha] \quad (4.1.10)$$

Применим к уравнению (4.1.10) приближение коротких длин волн. Если длина волны стремится к нулю ( $\lambda_0 \rightarrow 0$ ), то в правой части уравнения получается величина, близкая к нулю. Отсюда можно получить **уравнение эйконала**:

$$\| (\nabla E)^2 = n^2 \quad (4.1.11)$$

или:

$$(\nabla E)^2 = \left( \frac{\partial E}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial E}{\partial z} \right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (4.1.12)$$

Из уравнения эйконала следует, что геометрическая оптика применима только для коротких длин волн. Чем короче длина волны, тем точнее приближение геометрической оптики.

## 4.2. Основные понятия геометрической оптики

### 4.2.1. Волновой фронт и лучи

Из приближения коротких волн, рассмотренного в параграфе 4.1, следует подход к изучению распространения света на основе понятия лучей.

**Луч** – это прямая или кривая линия, вдоль которой распространяется энергия светового поля.

Таким образом, геометрическая оптика описывает распространение электромагнитного поля как распространение лучей в пространстве. Кроме лучей существует еще одно важное понятие геометрической оптики – волновой фронт.

**Волновой фронт** – это поверхность равной фазы или равного эйконала:

$$E(\mathbf{r}) = \text{const} \quad (4.2.1)$$

Изменяя значение  $\text{const}$  можно получить различные волновые фронты. При перемещении волнового фронта из одного положения в другое происходит увеличение эйконала.

**Основные свойства волновых фронтов:**

- волновые фронты в рамках геометрической оптики не пересекаются между собой;
- через каждую точку пространства проходит волновой фронт, и причем только один.

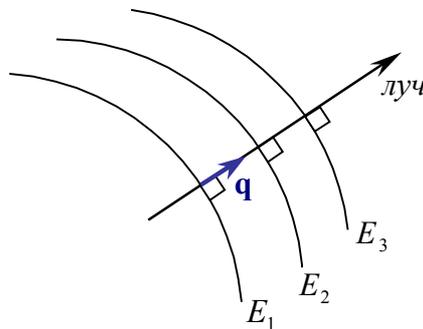


Рис.4.2.1. Волновые фронты и лучи.

В геометрической оптике **лучи** определяются как нормали к волновому фронту. Направление луча совпадает с направлением распространения волнового фронта и определяется оптическим вектором  $\mathbf{q}$  в каждой точке пространства (рис.4.2.1).

**Уравнение волнового фронта:**

$$\mathbf{q} = \nabla E \quad (4.2.2)$$

Если среда, в которой распространяется свет однородна, то есть ее показатель преломления не зависит от пространственных координат ( $n = \text{const}$ ), то из уравнения эйконала (4.1.11) следует, что направление луча остается постоянным:

$$\mathbf{q} = \text{const} \quad (4.2.3)$$

Следовательно, в однородной среде лучи являются прямыми линиями. На границе раздела двух сред луч преломляется в соответствии с законом преломления.

В неоднородной среде, где показатель преломления непостоянен, лучи искривляются в сторону градиента показателя преломления  $\nabla n$ , то есть с

увеличением показателя преломления возрастает кривизна луча. При этом кривизна луча пропорциональна  $\nabla n$ . Если луч – это кривая, то вектор  $\mathbf{q}$  направлен по касательной к лучу в каждой точке (рис.4.2.2).

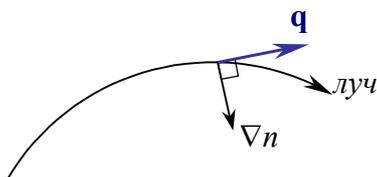


Рис.4.2.2. Оптический луч в неоднородной среде.

С помощью изучения траекторий лучей в неоднородной среде можно анализировать влияние неоднородностей на распространение света. Например, при использовании наземных оптических телескопов учитывать неоднородность атмосферы Земли. Например, корректируя качество изображения наземных оптических телескопов, учитывая неоднородность атмосферы Земли.

#### 4.2.2. Оптическая длина луча

Пусть имеется однородная среда ( $n = const$ ), тогда отрезок луча между точками  $P_1$  и  $P_2$  – это отрезок прямой с геометрической длиной  $l$  (рис.4.2.3).

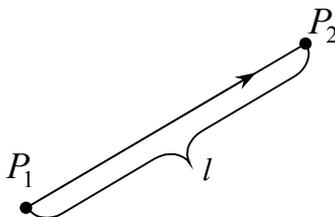


Рис.4.2.3. Оптическая длина луча в однородной среде.

#### Оптическая длина луча в однородной среде:

**Оптическая длина** луча в однородной среде – это произведение геометрической длины пути луча  $l$  на показатель преломления  $n$  среды, в которой распространяется свет:

$$[P_1P_2] = nl \quad (4.2.4)$$

Если среда является неоднородной ( $n(x, y, z) \neq const$ ), то путь луча можно разбить на бесконечно малые отрезки  $dS$ , в пределах каждого из которых показатель преломления можно считать постоянным (рис.4.2.4).

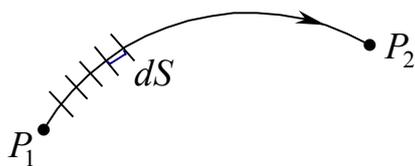


Рис.4.2.4. Оптическая длина луча в неоднородной среде.

В этом случае оптическая длина луча вычисляется как криволинейный интеграл:

$$\left\| [P_1 P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n \cdot dS \right. \quad (4.2.5)$$

Если есть несколько однородных сред, разделенных границами (рис.4.2.5), то оптическая длина луча вычисляется как сумма оптических длин лучей в каждой среде:

$$\left\| [P_1 P_2] = \sum l_k n_k \right. \quad (4.2.6)$$

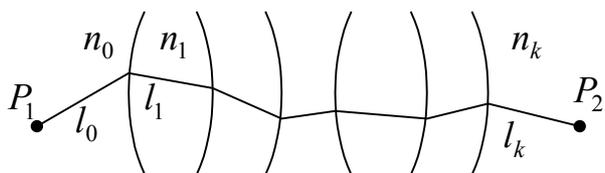


Рис.4.2.5. Оптическая длина луча в нескольких средах.

Если среды неоднородные, то можно пользоваться выражением (4.2.5), считая интеграл по ломаной линии.

### 4.2.3. Конгруэнция лучей

Пучок лучей – это множество линий, пронизывающих пространство. Но не каждое множество кривых или прямых линий, пронизывающих пространство, можно назвать пучком лучей. Для того чтобы множество линий образовывало пучок лучей, нужно чтобы это множество составило **конгруэнцию**.

**Конгруэнция** – это такая совокупность линий в пространстве, для которой выполняется условие, что через любую точку пространства можно провести только одну линию из этой системы (рис.4.2.6).

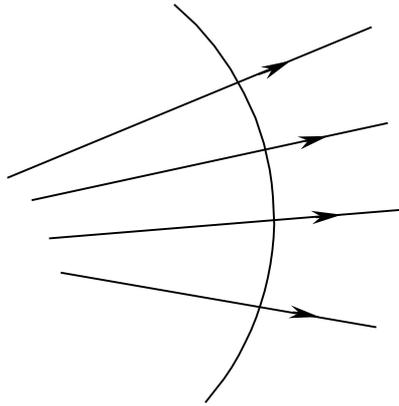


Рис.4.2.6. Конгруэнция.

Конгруэнция определяется следующим уравнением:

$$\text{rot}(\mathbf{q}(\mathbf{r})) = 0 \quad (4.2.7)$$

или

$$(\nabla \times \mathbf{q}(\mathbf{r})) = 0$$

где запись  $\mathbf{q}(\mathbf{r})$  определяет множество лучей в пространстве. Выражение (4.2.7) означает, что совокупность лучей не образует вихревые структуры.

**Нормальная конгруэнция** – это конгруэнция, все линии которой пересекаются некоторой поверхностью под прямым углом.

Пучок лучей – это множество лучей, которое представляет собой **нормальную конгруэнцию**.

### 4.3. Основные законы геометрической оптики

Все законы геометрической оптики следуют из закона сохранения энергии. Все эти законы не являются независимыми друг от друга.

#### 4.3.1. Закон независимого распространения лучей

Если через точку пространства проходит несколько лучей, то каждый луч ведет себя так, как если бы других лучей не было.

Это справедливо для линейной оптики, где показатель преломления не зависит от амплитуды и интенсивности проходящего света.

#### 4.3.2. Закон обратимости

Траектория и длина хода лучей не зависят от направления распространения.

То есть, если луч, который распространяется от точки  $P_1$  до точки  $P_2$ , пустить в обратном ходе (от  $P_2$  к  $P_1$ ), то он будет иметь такую же траекторию, как и в прямом.

#### 4.3.3. Закон прямолинейного распространения

|| В однородной среде лучи – прямые линии (см. параграф 4.2.1).

#### 4.3.4. Закон преломления и отражения

Закон отражения и преломления подробно рассматривается в **Главе 3**. В рамках геометрической оптики формулировки законов преломления и отражения сохраняются.

#### 4.3.5. Принцип таутохронизма

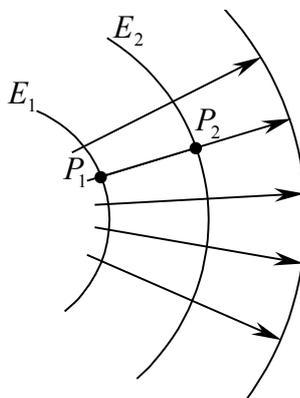


Рис.4.3.1. Принцип таутохронизма.

Рассмотрим распространение света, как распространение волновых фронтов (рис.4.3.1).

|| Оптическая длина любого луча между двумя волновыми фронтами одна и та же:

$$[P_1 P_2] = E_2 - E_1 = const \quad (4.3.1)$$

Волновые фронты – поверхности, которые оптически параллельны друг другу. Это справедливо и для распространения волновых фронтов в неоднородных средах

#### 4.3.6. Принцип Ферма

Пусть имеются две точки  $P_1$  и  $P_2$ , расположенные, возможно, в различных средах. Эти точки можно соединить между собой различными линиями. Среди этих линий будет только одна, которая будет являться оптическим лучом,

который распространяется в соответствии с законами геометрической оптики (рис.4.3.2).

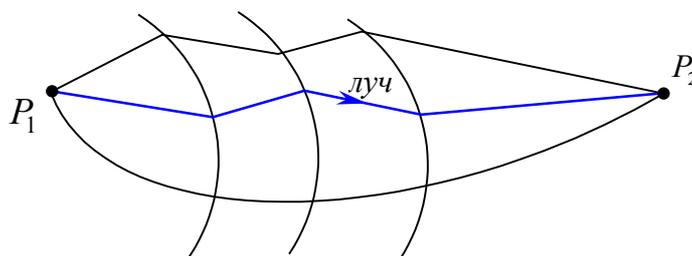


Рис.4.3.2. Принцип Ферма.

Можно сосчитать для сравнения оптическую длину этого луча и каких-либо других линий. В результате такого сравнения был получен принцип Ферма (*Fermat principle*).

#### Принцип Ферма:

Оптическая длина луча между двумя точками минимальна по сравнению со всеми другими линиями, соединяющими эти две точки:

$$[P_1P_2] = \min \quad (4.3.2)$$

Существует более полная формулировка:

Оптическая длина луча между двумя точками является стационарной по отношению к смещению этой линии.

Луч – кратчайшее расстояние между двумя точками. Если линия, вдоль которой мы измеряем расстояние между двумя точками, отличается от луча на величину 1-го порядка малости, то оптическая длина этой линии отличается от оптической длины луча на величину 2-го порядка малости.

Если оптическую длину луча, соединяющего две точки, поделить на скорость света, то получим время, необходимое на преодоление расстояния между двумя точками:

$$\frac{[P_1P_2]}{c} = \Delta t \quad \Rightarrow \quad [P_1P_2] = c\Delta t \quad (4.3.3)$$

Еще одна формулировка принципа Ферма:

Луч, соединяющий две точки, идет по такому пути, который требует наименьшего времени (по самому быстрому пути).

Из этого принципа могут быть выведены законы преломления, отражения и т.д.

### 4.3.7. Закон Малюса-Дюпена

Нормальная конгруэнция сохраняет свойства нормальной конгруэнции в процессе прохождения через различные среды.

### 4.3.8. Инварианты

**Инварианты** (от слова *неизменный*) – это соотношения, выражения, которые сохраняют свой вид при изменении каких-либо условий, например, при прохождении света через различные среды или системы.

#### Интегральный инвариант Лагранжа

Пусть имеется некоторая нормальная конгруэнция (пучок лучей), и две произвольные точки в пространстве  $P_1$  и  $P_2$  (рис.4.3.3). Соединим эти две точки произвольной линией и найдем криволинейный интеграл.

$$\int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{q} d\mathbf{r}) \quad (4.3.4)$$

Криволинейный интеграл (4.3.4), взятый между двумя любыми точками  $P_1$  и  $P_2$ , не зависит от пути интегрирования.

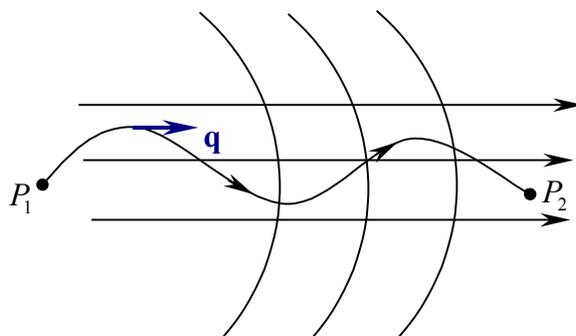


Рис.4.3.3. Интегральный инвариант Лагранжа.

#### Дифференциальный инвариант Лагранжа

Луч в пространстве полностью описывается радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , который содержит три линейные координаты  $(x, y, z)$ , и оптическим вектором  $\mathbf{q}$ , который содержит три угловые координаты  $(X, Y, Z)$ . Всего, таким образом, имеется 6 параметров для определения некоторого луча в пространстве. Однако из этих 6 параметров только 4 являются независимыми, так как можно получить два уравнения, которые связывают параметры луча друг с другом.

Первое уравнение определяет длину оптического вектора:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2 \quad (4.3.5)$$

где  $n$  – показатель преломления среды.

Второе уравнение вытекает из условия ортогональности векторов  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{r}$ :

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}) = 0$$

или

$$xX + yY + zZ = 0 \quad (4.3.6)$$

Из выражений (4.3.5) и (4.3.6), воспользовавшись аналитической геометрией, можно вывести следующее соотношение:

$$I_e = \frac{\partial r}{\partial U} \cdot \frac{\partial q}{\partial V} - \frac{\partial r}{\partial V} \cdot \frac{\partial q}{\partial U} \quad (4.3.7)$$

где  $U$  и  $V$  – это пара любых из 6-ти параметров луча.

**Дифференциальный инвариант Лагранжа:**

Величина  $I_e$  сохраняет свое значение для данного луча при распространении пучка лучей через любую совокупность оптических сред.

### Инвариант Штраубеля

Рассмотрим в пространстве бесконечно малые площадки  $dS_1$  и  $dS_2$ , находящиеся на некотором расстоянии друг от друга (рис.4.3.4). Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы между нормальными к площадкам и направлением луча.

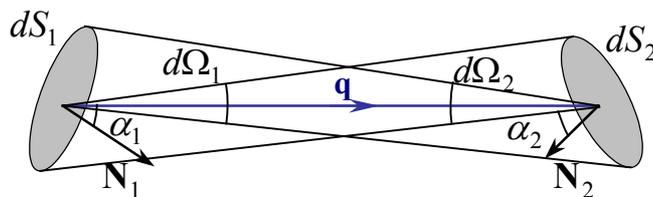


Рис.4.3.4. Световая трубка.

Если мы соединим все возможные точки краев площадки друг с другом, то получим так называемую **лучевую (световую) трубку**.

**Геометрический фактор** лучевой трубки записывается так:

$$\begin{aligned} G &= n^2 \cdot dS_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot d\Omega_1 = n^2 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_2 \cdot d\Omega_2 = \\ &= \frac{n^2 \cdot dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2}{c^2} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

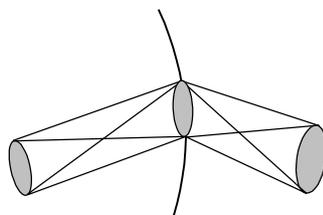


Рис.4.3.5. Инвариант Штраубеля.

### Инвариант Штраубеля:

Геометрический фактор остается инвариантным при распространении лучевой трубки через любую последовательность различных сред (рис.4.3.5).

Инвариант Штраубеля выражает закон сохранения энергии, так как он показывает неизменность лучистого потока.

Из определения яркости можно получить следующее равенство:

$$d^2\Phi = L_R \cdot G \quad (4.3.9)$$

где  $L_R = \frac{L}{n^2}$  – приведенная яркость, которая инвариантна, как уже было сказано в главе 2.

## 4.4. Пучки лучей

### 4.4.1. Гомоцентрические пучки лучей

**Гомоцентрические пучки лучей** имеют общий центр, то есть все лучи выходят или сходятся в одной точке.

Гомоцентрические пучки лучей могут быть сходящимися (рис.4.4.1.а), расходящимися (рис.4.4.1.б), или параллельными (рис.4.4.1.в).

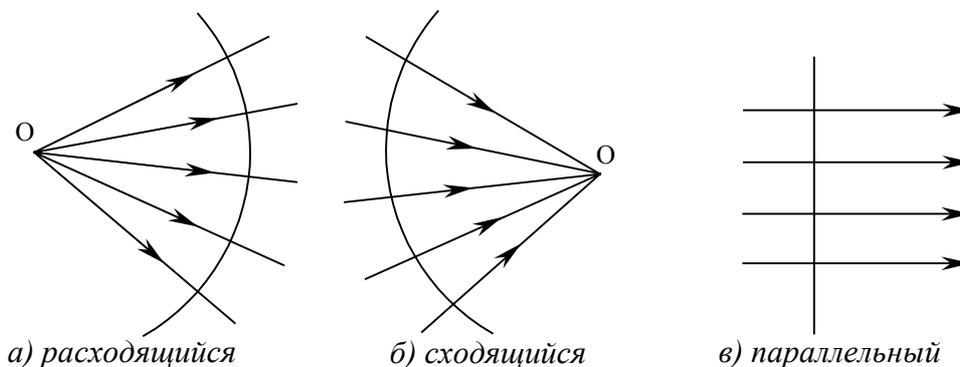
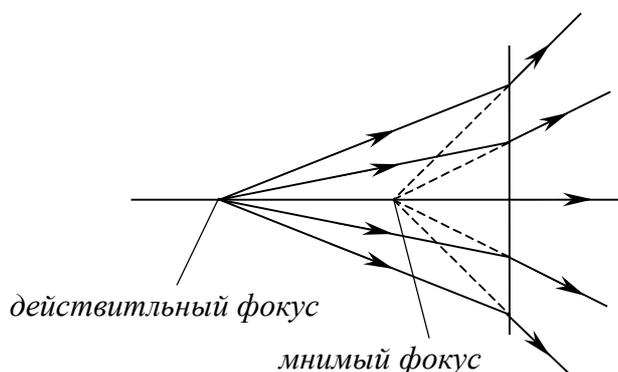


Рис.4.4.1. Пучки лучей.

**Фокус пучка** – это точка, в которой все лучи сходятся или из которой они все выходят. Волновой фронт такого пучка представляет собой сферическую поверхность. В частном случае фокус пучка находится на бесконечности, тогда волновой фронт плоский, а все лучи параллельны.

*Фокус, focus (лат.) – очаг, место где горит огонь*

Фокус может быть мнимым или действительным. Действительный фокус образован самими лучами, а мнимый – их продолжениями (рис.4.4.2).

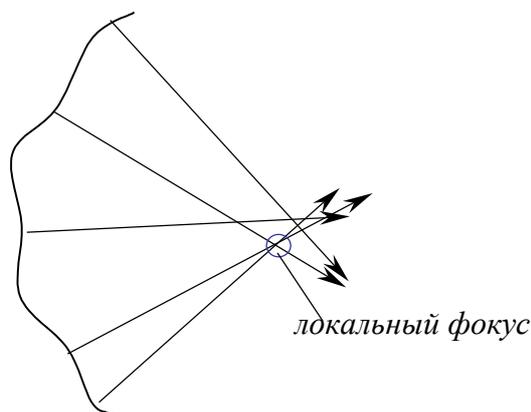


*Рис.4.4.2. Действительный и мнимый фокус.*

Все рассмотренные здесь пучки являются двухпараметрическими (показатель преломления фиксирован, положение фокуса зависит от оптического вектора  $\mathbf{q}$ , а он имеет два параметра). Кроме таких пучков, существуют пучки, обладающие более сложными свойствами (например, лазерные пучки). Их структура определяется не двумя, а четырьмя параметрами.

#### 4.4.2. Негомоцентрические пучки

**Негомоцентрический пучок** – это пучок, не имеющий общего фокуса (лучи не пересекаются в одной точке). Волновой фронт такого пучка – не сферической и не плоской формы (рис.4.4.3).



*Рис.4.4.3. Негомоцентрический пучок.*

У негомоцентрических пучков нет общего фокуса, но есть локальные фокусы. **Локальный фокус** – это точка, в которой пересекается часть лучей пучка (рис.4.4.3). У бесконечно узкого пучка всегда есть локальный фокус. Если рассматривать широкий пучок как совокупность бесконечно узких пучков, то совокупность локальных фокусов образует поверхность сложной формы, которая называется **каустикой**.

#### 4.4.3. Астигматический пучок

Частным случаем негомоцентрического пучка является астигматический пучок. Бесконечно узкий астигматический пучок имеет два локальных фокуса – **сагиттальный фокус**  $F_s$  и **меридиональный фокус**  $F_m$ . Широкий астигматический пучок имеет две плоскости симметрии, которые взаимно перпендикулярны – меридиональную и сагиттальную. Каустика представляет собой две полосы (вертикальная и горизонтальная) (рис.4.4.4). У широкого астигматического пучка поверхность волнового фронта – поверхность двоякой кривизны, то есть волновой фронт имеет торическую форму.

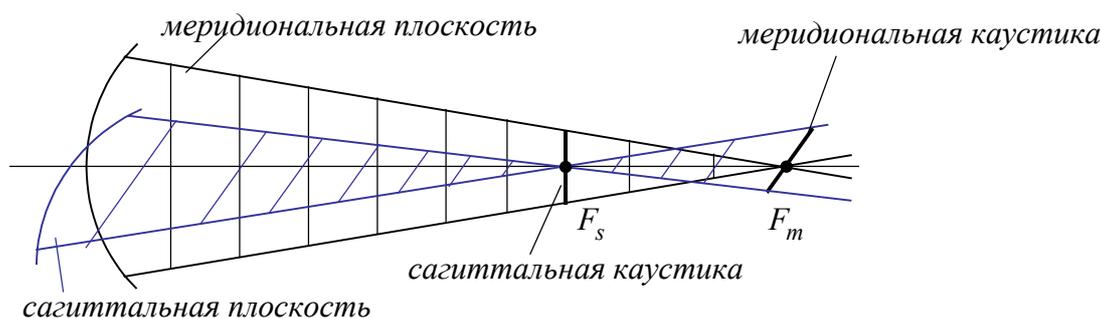


Рис.4.4.4. Астигматический пучок.

Расстояние между точками  $F_s$  и  $F_m$  – это мера астигматизма. Это расстояние называют продольным астигматизмом  $\delta(F_s, F_m)$ . Если  $\delta(F_s, F_m) = 0$ , то пучок будет гомоцентрическим. Совокупность лучей астигматического пучка называют конусом Штурма.

### 4.5. Перенос поля в приближении геометрической оптики. Пределы применимости геометрической оптики

#### 4.5.1. Уравнение переноса комплексной амплитуды в приближении геометрической оптики

В приближении геометрической оптики поле распространяется вдоль лучей. При таком подходе перенос поля – это перенос комплексной амплитуды  $U(P_1)$  из точки  $P_1$  в точку  $P_2$ .

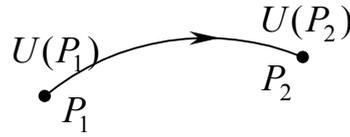


Рис.4.5.1. Перенос поля из точки в точку.

Пусть имеются точки  $P_1$  и  $P_2$ , которые находятся в различных средах (рис.4.5.1). Если известна комплексная амплитуда поля в точке  $P_1$ , то можно найти комплексную амплитуду поля в точке  $P_2$ .

Комплексную амплитуду поля в точках  $P_1$  и  $P_2$  можно выразить в соответствии с выражением (1.3.23):

$$\begin{aligned}
 U(P_1) &= a(P_1) \cdot e^{ik_0 E(P_1)} \\
 U(P_2) &= a(P_2) \cdot e^{ik_0 E(P_2)}
 \end{aligned}
 \tag{4.5.1}$$

где  $a$  – вещественная амплитуда.

Рассмотрим, как в отдельности друг от друга переносятся эйконал и вещественная амплитуда.

**Уравнение переноса эйконала** можно получить из выражения (4.3.1) для оптической длины луча между точками  $P_1$  и  $P_2$ :

$$\parallel E_2 = E_1 + [P_1 P_2]
 \tag{4.5.1}$$

Для переноса вещественной амплитуды рассмотрим лучевую (световую) трубку (рис.4.5.2), которая состоит из бесконечно малой площадки  $dS_1$ , и бесконечно узкого пучка лучей – нормалей к волновому фронту. Пучок вырезает на поверхности бесконечно малую площадку  $dS_2$ .

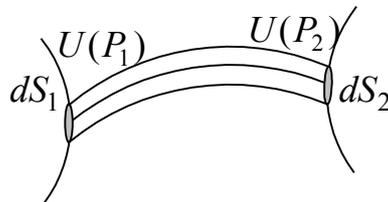


Рис.4.5.2. Лучевая трубка.

Энергия распространяется вдоль лучей, и если нет потерь, то поток энергии через площадку  $dS_1$  равен потоку энергии через площадку  $dS_2$ :

$$a^2(P_1) \cdot dS_1 = a^2(P_2) \cdot dS_2
 \tag{4.5.3}$$

Чтобы учесть потери, можно ввести **коэффициент пропускания по энергии**  $\tau(P_1P_2)$  между точками. Тогда выражение (4.5.3) можно переписать следующим образом:

$$\tau(P_1P_2) \cdot a^2(P_1) \cdot dS_1 \cdot n_1 = a^2(P_2) \cdot dS_2 \cdot n_2 \quad (4.5.4)$$

Отсюда следует **уравнение переноса вещественной амплитуды**:

$$a(P_2) = a(P_1) \cdot \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)} \quad (4.5.5)$$

Тогда **уравнение переноса комплексной амплитуды** будет выглядеть следующим образом:

$$U(P_2) = U(P_1) \cdot \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)} \cdot e^{ik_0[P_1P_2]} \quad (4.5.6)$$

Введем функцию **комплексного пропускания среды вдоль луча**  $f(P_1P_2)$  между точками  $P_1$  и  $P_2$ , которая характеризует среду между точками  $P_1$  и  $P_2$ :

$$f(P_1P_2) = \sqrt{\frac{n_1 dS_1}{n_2 dS_2}} \cdot \sqrt{\tau(P_1P_2)} \cdot e^{ik_0[P_1P_2]} \quad (4.5.7)$$

Заметим, что в рамках геометрической оптики происходит поточечный перенос поля, то есть каждый луч переносит энергию независимо от других лучей. Поле в точке  $P_2$  определяется только точкой  $P_1$ .

#### 4.5.2. Пределы применимости геометрической оптики

Основное приближение геометрической оптики – это приближение коротких длин волн. Это означает, что длины волн считаются пренебрежимо малыми по сравнению с размерами неоднородностей электромагнитного поля и среды. Поэтому геометрическая оптика не применима там, где необходимо исследовать тонкую структуру неоднородностей, сравнимых с длиной волны.

Итак, геометрическая оптика не описывает распределение светового поля в следующих ситуациях:

- вблизи предмета и изображения в оптических системах, то есть там, где возможна тонкая структура неоднородностей,
- вблизи фокусов пучков.

В этих случаях требуются другие подходы к описанию светового поля, основанные на теории дифракции.

## 5. Геометрическая теория оптических изображений. Идеальные оптические системы

### 5.1. Описание оптических систем

#### 5.1.1. Элементы оптических систем

**Оптическая система** – это совокупность оптических сред, разделенных оптическими поверхностями, которые ограничиваются диафрагмами. Оптическая система предназначена для формирования изображения путем перераспределения в пространстве электромагнитного поля, исходящего из предмета (преобразования световых пучков).

Преобразование световых пучков в оптической системе происходит за счет преломления и отражения света поверхностями, а также за счет ограничения пучков диафрагмой. Кроме того, пучки света могут преобразовываться за счет дифракции.

В наиболее общем случае оптическая система может состоять из следующих **функциональных элементов**:

- оптические среды,
- оптические поверхности,
- зеркала,
- диафрагмы,
- дифракционные оптические элементы.

#### **Оптические среды**

**Оптические среды** – это прозрачные однородные среды с точным значением показателя преломления (с точностью до 4-6 знаков после запятой).

В качестве оптических сред в оптических системах в основном применяют:

- воздух (вакуум) ( $n \approx 1$ ),
- оптические стекла – точно известны их показатели преломления и различные оптико-физические свойства ( $n = 1,42 \div 2,0$ ),
- оптические кристаллы – работают в более широком диапазоне длин волн, чем стекла.

Оптические системы используются в широком интервале длин волн (от УФ до ИК), поэтому важно знать показатели преломления стекол и кристаллов для разных длин волн. **Дисперсия оптических материалов** – это зависимость

показателя преломления от длины волны. Она описывается дисперсионными формулами, называемыми **формулами Зельмейера**:

$$n^2 = 1 + \sum_{k=1}^{4-5} \frac{b_k}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (5.1.1)$$

$$n = a_1 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^4 + a_4\lambda^{-2} + a_5\lambda^{-4} + a_6\lambda^{-6} \quad (5.1.2)$$

Все стекла отличаются друг от друга характером зависимости показателя преломления от длины волны. Можно описывать оптические материалы либо значениями коэффициентов дисперсионной формулы, либо непосредственно значениями показателя преломления для различных длин волн.

Оптические материалы могут работать только в определенном интервале длин волн (от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ ), в пределах которого показатель преломления хорошо описывается дисперсионной формулой. Вблизи границ этого интервала зависимость показателя преломления сильно отличается от описанного дисперсионной формулой (показатель преломления либо резко убывает, либо резко увеличивается). Пограничные интервалы длин волн называются **полосами поглощения**. У различных стекол эти полосы разные.

В видимой области спектра имеются **стандартные длины волн**, называемые **Фраунгоферовыми линиями**:

$i - 365$ нм	$d - 587$ нм
$h - 404$ нм	$D - 589$ нм
$G' - 434$ нм	$C' - 643$ нм
$g - 436$ нм	$C - 656$ нм
$F' - 480$ нм	$r - 706$ нм
$F - 486$ нм	$A' - 768$ нм
$e - 546$ нм	

Основными характеристиками стекол являются **показатель преломления для основной длины волны**  $n_{\lambda_0}$  и **общая дисперсия**  $n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  – наибольшая и наименьшая длины волн, которые пропускает стекло.

В качестве опорных или основных длин волн для видимой области сейчас используются: центральная длина волны  $\lambda_0 = e$ , крайние длины волн  $\lambda_1 = F'$ ,  $\lambda_2 = C'$ . Ранее в качестве основных длин волн использовались:  $\lambda_0 = D$ ,  $\lambda_1 = F$ ,  $\lambda_2 = C$ .

Оптическое стекло характеризуется показателем преломления для основной длины волны  $n_e$  (или  $n_D$ ), а также общей дисперсией  $n_{F'} - n_{C'}$  (или  $n_F - n_C$ ).

Еще одной важной характеристикой стекла является **число Аббе** (коэффициент относительной дисперсии):

$$V_e = \frac{n_e - 1}{n_{F'} - n_{C'}} \quad (5.1.3)$$

или

$$V_D = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$$

*Эрнст Аббе (Ernst Abbe) – немецкий ученый, основатель современной прикладной оптики, научный руководитель фирм Carl Zeiss и Schott (конец XIX века).*

Чем меньше число Аббе, тем больше дисперсия, то есть сильнее зависимость показателя преломления от длины волны. По числу Аббе оптические стекла делят на две группы:

- $V_e > 60$  – кроны,
- $V_e < 60$  – флинты.

Комбинация стекол, принадлежащих различным группам, дает возможность создавать высококачественные оптические системы. Кроны и флинты – это основные группы оптических стекол. Их названия сформировались в Англии в XVIII веке, когда впервые было основано промышленное производство оптических стекол.

## Оптические поверхности

**Оптическая поверхность** – это гладкая регулярная поверхность точно известной формы.

Поверхности могут быть:

- плоские,
- сферические,
- асферические.

Чаще всего в оптике применяются плоские поверхности и сферические поверхности. Для сферических поверхностей задается один параметр поверхности – радиус кривизны  $R$ . Плоской поверхностью можно считать сферическую поверхность с радиусом кривизны равным бесконечности. Для плоскости  $R = \infty$ , но условно принято считать, что  $R = 0$ .

При компьютерных расчетах удобно использовать не радиус кривизны, а **кривизну поверхности**:

$$\rho = \frac{1}{R} \quad (5.1.4)$$

Форма оптических поверхностей должна выдерживаться с точностью меньше длины волны. В идеальных оптических системах отклонения от идеальной формы поверхности не должны превышать  $0.1 - 0.02\lambda$ , при этом допуск не зависит от размера поверхности.

Плоские и сферические поверхности изготавливаются достаточно просто (методом притирки), и поэтому именно их чаще всего используют в оптических системах. Асферические поверхности используются редко из-за сложности их изготовления и контроля, так как у них различная величина радиуса кривизны по различным направлениям. В настоящее время существуют технологии изготовления асферических поверхностей на станках с программным управлением. Получение точного профиля асферической поверхности возможно только методом ретуши.

### Диафрагмы

**Диафрагма** – это металлический экран с круглым отверстием. На оптических схемах диафрагмы могут быть заданы явно – диафрагма является самостоятельным элементом оптической системы (рис.5.1.1.а), или неявно – роль диафрагмы играет край или оправа линзы (рис.5.1.1.б).

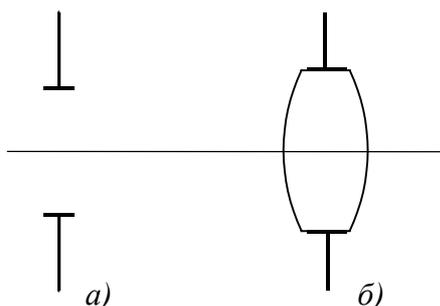


Рис.5.1.1. Диафрагмы.

#### 5.1.2. Взаимное расположение элементов в оптической системе

##### Центрированная оптическая система.

**Центрированная оптическая система** – это оптическая система, которая имеет ось симметрии (оптическую ось) и сохраняет все свои свойства при вращении вокруг этой оси.

Для центрированной оптической системы должны выполняться следующие условия:

- все плоские поверхности перпендикулярны оси,
- центры всех сферических поверхностей принадлежат оси,
- все диафрагмы круглые, центры всех диафрагм принадлежат оси,
- все среды либо однородны, либо распределение показателя преломления симметрично относительно оси.

Центрированные оптические системы могут включать в себя плоские зеркала и отражающие призмы, ломающие оптическую ось, но по сути не влияющие на симметрию системы (рис.5.1.2).

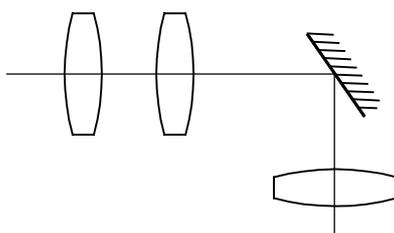


Рис.5.1.2. Центрированная оптическая система с изломом оптической оси.

Нумерация элементов оптической системы ведется по ходу луча (рис.5.1.3). Все расстояния между поверхностями (толщины линз или воздушные промежутки) откладываются по оси.

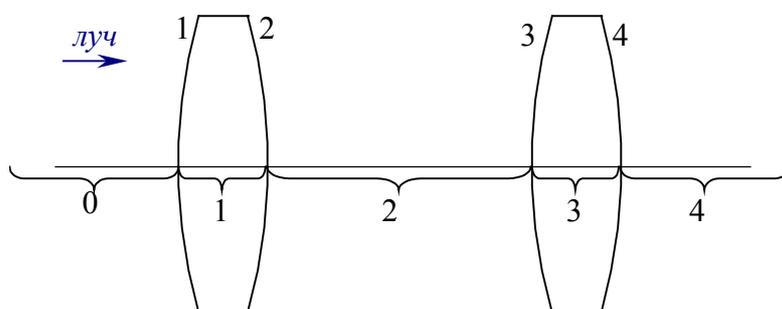


Рис.5.1.3. Нумерация элементов оптической системы.

### Правила знаков

Для удобства чтения оптических схем и компьютерных расчетов в оптике приняты единые правила знаков.

Положительным **направлением света** считается распространение слева направо.

**Осевые расстояния** между преломляющими поверхностями считаются положительными, если они измеряются по направлению распространения света (слева направо) (рис.5.1.4).

**Радиус кривизны поверхности** считается положительным, если центр кривизны находится справа от поверхности (поверхность обращена выпуклостью влево) (рис.5.1.4).

**Угол между лучом и оптической осью** считается положительным, если для совмещения оси с лучом ось нужно вращать по часовой стрелке (рис.5.1.4).

**Отрезки, перпендикулярные оптической оси** считаются положительными, если они располагаются над осью (рис.5.1.4).

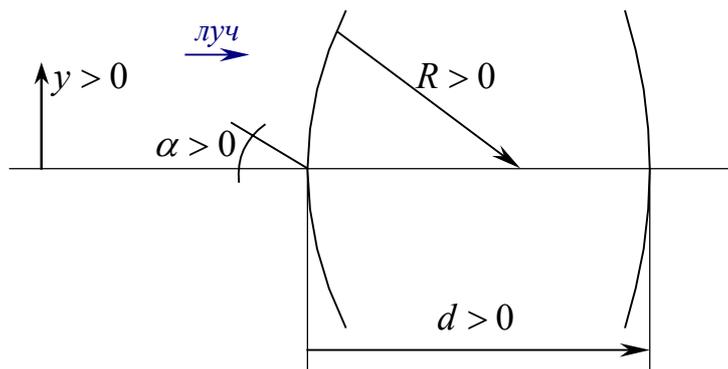


Рис.5.1.4. Правила знаков.

На чертежах и рисунках всегда указывают знак отрезков и углов. При оптических расчетах считается, что после каждой отражающей поверхности показатель преломления, осевое расстояние и угол отражения меняют знак на противоположный.

Луч может пройти одну и ту же поверхность несколько раз, поэтому физическое и расчетное число поверхностей может различаться. Например, на рис.5.1.5 показаны 8 физических и 12 расчетных поверхностей.

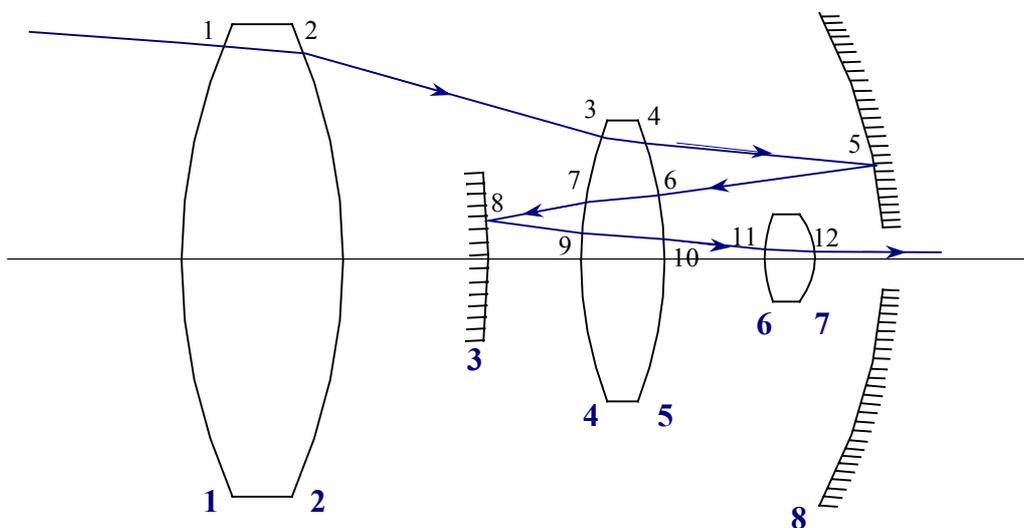


Рис.5.1.5. Физические и расчетные поверхности.

По составу оптические системы делятся на:

- линзовые (нет зеркал, кроме плоских для излома оптической оси),
- зеркальные,
- зеркально-линзовые.

### **Меридиональная и сагиттальная плоскости**

При анализе оптической системы используются понятия меридиональной и сагиттальной плоскости. **Меридиональная плоскость** – это плоскость, проходящая через оптическую ось (например плоскость рисунка 5.1.5).

**Сагиттальная плоскость** – это плоскость, содержащая луч и перпендикулярная меридиональной плоскости (может быть ломаной и рассматривается по частям). Ее название произошло от слова “сагитта” (лат.) – стрела. Примером такой плоскости может служить воображаемая ломаная плоскость, содержащая луч на рис. 5.1.5 и перпендикулярная плоскости этого рисунка.

### 5.1.3. Предмет и изображение в оптической системе

#### **Основные положения**

Оптические системы в основном предназначены для формирования изображения (изображающие оптические системы). Для таких систем вводится понятие предмета и изображения. Для оптических систем, не строящих изображение, понятие предмета и изображения вводится условно.

В геометрической оптике **предмет** – это совокупность точек, из которых выходят лучи, попадающие в оптическую систему.

Из каждой точки предмета выходит гомоцентрический пучок лучей. Вся возможная совокупность точек (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) образует **пространство предметов**. Пространство предметов может быть **действительным** или **мнимым**.

Оптическая система делит все пространство на две части:

- пространство предметов,
- пространство изображений.

**Плоскость предметов и плоскость изображений** – это плоскости, перпендикулярные оптической оси и проходящие через предмет и изображение.

## Сопряженные точки

В геометрической оптике любой точке пространства предметов можно поставить в соответствие сопряженную ей точку в пространстве изображений. Если из некоторой точки в пространстве предметов выходят лучи и эти лучи затем пересекаются в пространстве изображений в какой-либо точке, то эти две точки называются **сопряженными**.

**Сопряженные линии** – это линии, для которых каждая точка линии в пространстве предметов сопряжена с каждой соответствующей точкой линии в пространстве изображений (для идеальных оптических систем).

В реальных оптических системах лучи, выходящие из точки  $A$ , только приближенно сходятся в точке  $A'$ . Для идеальных оптических систем каждой точке пространства предметов обязательно соответствует идеально сопряженная ей точка в пространстве изображений.

## Типы предмета и изображения

Существуют два типа предмета и изображения:

**Ближний тип** – предмет (изображение) расположены на конечном расстоянии, поперечные размеры измеряются в единицах длины.

**Дальний тип** – предмет (изображение) расположены в бесконечности, поперечные размеры выражены в угловой мере.

Термины “конечное расстояние” и “бесконечность” достаточно условны и просто соответствуют более или менее близкому расположению предмета (изображения) по отношению к оптической системе.

### **5.2. Теория идеальных оптических систем (параксиальная или гауссова оптика)**

#### 5.2.1. Основные положения

В параксиальной области (бесконечно близко к оптической оси), любая реальная система ведет себя как идеальная:

Каждой точке пространства предметов можно поставить в соответствие сопряженную ей точку в пространстве изображений.

Каждая прямая линия имеет сопряженную ей прямую линию в пространстве изображений.

Каждая плоскость пространства предметов имеет сопряженную ей плоскость в пространстве изображений.

Из этих положений следует, что:

Меридиональная плоскость имеет сопряженную ей меридиональную плоскость в пространстве изображений.

Плоскость в пространстве предметов, перпендикулярная оптической оси, имеет сопряженную ей плоскость, перпендикулярную оптической оси в пространстве изображений.

## 5.2.2. Линейное, угловое, продольное увеличение

### Линейное (поперечное) увеличение

**Линейное увеличение оптической системы** – это отношение линейного размера изображения в направлении, перпендикулярном оптической оси, к соответствующему размеру предмета в направлении перпендикулярном оптической оси (рис.5.2.1):

$$\beta = \frac{y'}{y} \quad (5.2.1)$$

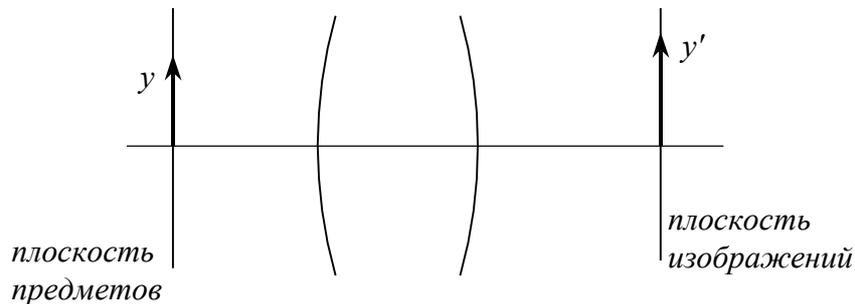


Рис.5.2.1. Сопряженные линейные величины.

Если  $\beta > 0$ , то отрезки  $y$  и  $y'$  направлены в одну сторону, если  $\beta < 1$ , то отрезки  $y$  и  $y'$  направлены в разные стороны, то есть происходит оборачивание изображения.

Если  $|\beta| > 1$ , то величина изображения больше величины предмета, если  $|\beta| < 1$ , то величина изображения меньше величины предмета.

Для идеальной оптической системы линейное увеличение для любой величины предмета и изображения в одних и тех же плоскостях одно и то же.

## Угловое увеличение

**Угловое увеличение оптической системы** – это отношение тангенса угла между лучом и оптической осью в пространстве изображений к тангенсу угла между сопряженным с ним лучом в пространстве предметов и осью (рис.5.2.2):

$$W = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (5.2.2)$$

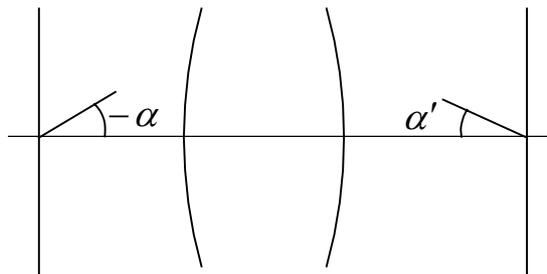


Рис.5.2.2. Сопряженные угловые величины.

В параксиальной области углы малы, и следовательно, угловое увеличение – это отношение любых из следующих угловых величин:

$$W = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad (5.2.3)$$

## Продольное увеличение

**Продольное увеличение оптической системы** – это отношение бесконечно малого отрезка, взятого вдоль оптической оси в пространстве изображений, к сопряженному с ним отрезку в пространстве предметов (рис.5.2.3):

$$Q = \frac{l'}{l} \quad (5.2.4)$$

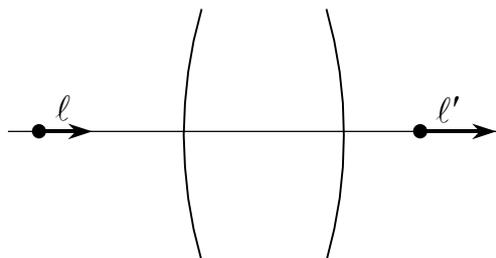


Рис.5.2.3. Сопряженные продольные отрезки.

### 5.2.3. Кардинальные точки и отрезки

Рассмотрим плоскости в пространстве предметов и сопряженные им плоскости в пространстве изображений. Найдем пару плоскостей, в которых линейное увеличение равно единице. В общем случае такая пара плоскостей существует, причем только одна (исключением являются афокальные или телескопические системы, для которых такие плоскости могут не существовать или их может быть бесконечное множество).

**Главными плоскостями системы** называется пара сопряженных плоскостей, в которых линейное увеличение равно единице ( $\beta = 1$ ).

**Главные точки**  $H$  и  $H'$  – это точки пересечения главных плоскостей с оптической осью.

Рассмотрим случай, когда линейное увеличение равно нулю, или бесконечности. Отодвинем плоскость предметов бесконечно далеко от оптической системы. Сопряженная ей плоскость называется **задней фокальной плоскостью**, а точка пересечения этой плоскости с оптической осью – **задний фокус**  $F'$  (рис.5.2.4).

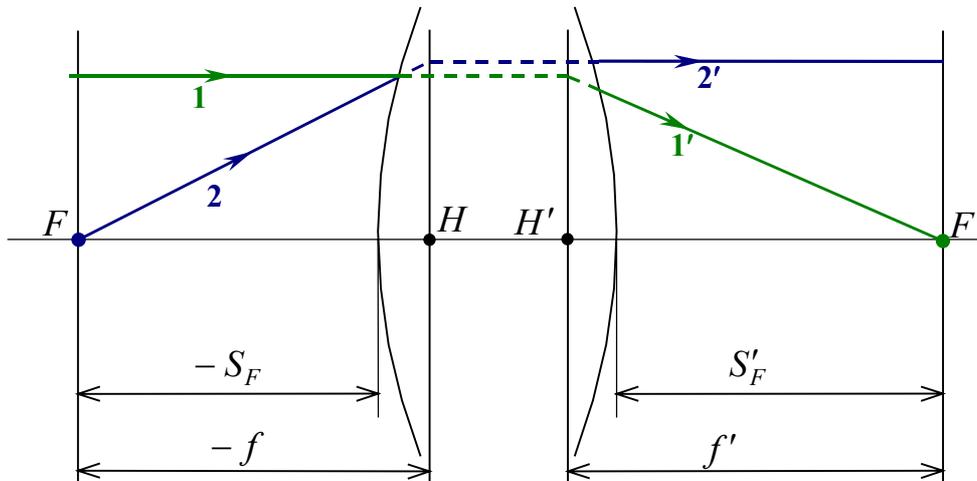


Рис.5.2.4. Кардинальные точки и отрезки.

Расстояние от задней главной точки до заднего фокуса называется **задним фокусным расстоянием**  $f'$ .

Расстояние от последней поверхности до заднего фокуса называется **задним фокальным отрезком**  $S'_{F'}$ .

**Передний фокус**  $F$  – это точка на оптической оси в пространстве предметов, сопряженная с бесконечно удаленной точкой, расположенной на оптической оси в пространстве изображений.

Если лучи выходят из переднего фокуса, то они идут в пространстве изображений параллельно.

**Переднее фокусное расстояние**  $f$  – это расстояние от передней главной точки до переднего фокуса.

**Передний фокальный отрезок**  $S_F$  – это расстояние от первой поверхности до переднего фокуса.

Если  $f' > 0$ , то система называется **собирающей** или **положительной**. Если  $f' < 0$ , то система **рассеивающая** или **отрицательная**.

Переднее и заднее фокусные расстояния не являются абсолютно независимыми, они связаны между собой соотношением:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n} \quad (5.2.5)$$

Выражение (5.2.5) можно переписать в виде:

$$\frac{f'}{n'} = -\frac{f}{n} \quad (5.2.6)$$

где  $\frac{f'}{n'}$  – **приведенное** или **эквивалентное фокусное расстояние**.

В том случае, если оптическая система находится в однородной среде (например, в воздухе)  $n = n'$ , следовательно, переднее и заднее фокусные расстояния равны по абсолютной величине  $|f| = |f'|$ .

**Оптическая сила** оптической системы:

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (5.2.7)$$

Чем больше оптическая сила, тем сильнее оптическая система изменяет ход лучей. Если  $\Phi = 0$  то  $f' = \infty$ .

#### 5.2.4. Построение изображений

Найдем изображение  $A'$  точки  $A$ . Для этого необходимо построить хотя бы два вспомогательных луча, на пересечении которых и будет находиться точка  $A'$  (рис.5.2.5). Вспомогательный луч **1** можно провести через точку  $A$  параллельно оптической оси. Тогда в пространстве изображений луч **1'** пройдет через задний фокус оптической системы. Вспомогательный луч **2** можно провести через точку  $A$  и передний фокус оптической системы. Тогда в пространстве изображений луч **2'** пойдет параллельно оптической оси. На

пересечении лучей  $1'$  и  $2'$  будет находиться изображение точки  $A$ . Теперь в точке  $A'$  пересекаются все лучи ( $1-2-3$ ), выходящие из точки  $A$ .

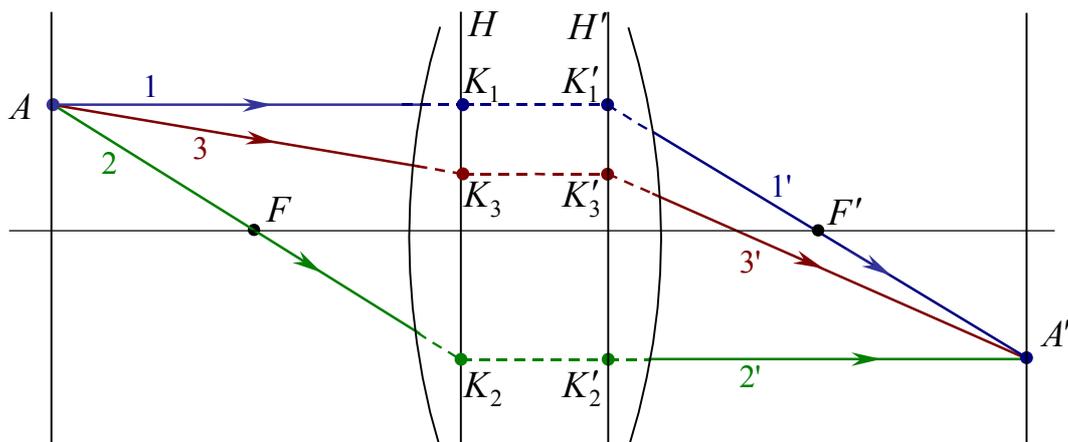


Рис.5.2.5. Построение изображения точки.

Построим теперь ход луча  $r$  (рис.5.2.6).

**1 способ.** Можно построить вспомогательный луч, параллельный данному и проходящий через передний фокус (луч  $1$ ). В пространстве изображений луч  $1'$  будет идти параллельно оптической оси. Так как лучи  $r$  и  $1$  параллельны в плоскости предметов, то в пространстве изображений они должны пересекаться в задней фокальной плоскости. Следовательно, луч  $r'$  пройдет через точку пересечения луча  $1'$  и задней фокальной плоскости.

**2 способ.** Можно построить вспомогательный луч, идущий параллельно оптической оси и проходящий через точку пересечения луча  $r$  и передней фокальной плоскости (луч  $2$ ). Соответствующий ему луч в пространстве изображений (луч  $2'$ ) будет проходить через задний фокус. Так как лучи  $r$  и  $2$  пересекаются в передней фокальной плоскости, в пространстве изображений они должны быть параллельными. Следовательно, луч  $r'$  пойдет параллельно лучу  $2'$ .

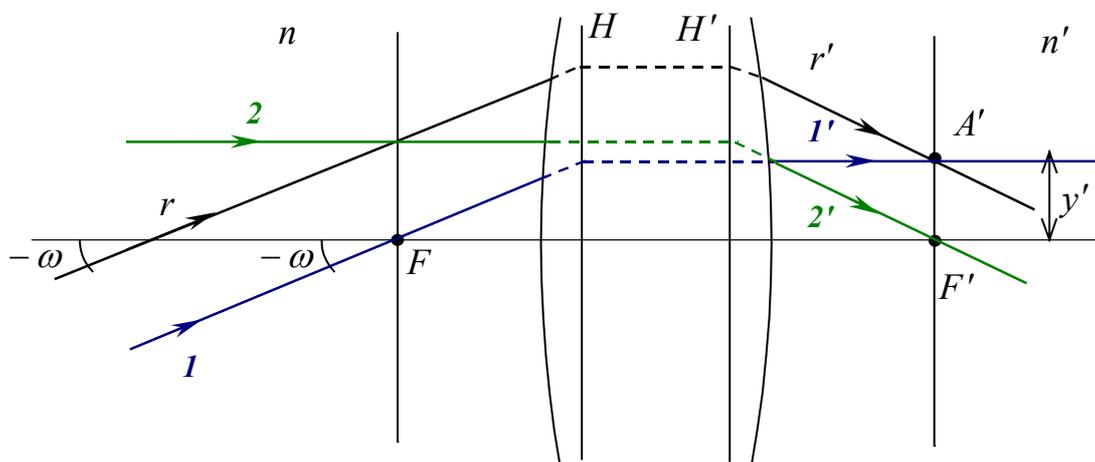


Рис.5.2.6. Построение хода луча.

### 5.3. Основные соотношения параксиальной оптики

Основные соотношения параксиальной оптики связывают между собой фокусные расстояния, положение и размеры предмета и изображения, угловое, линейное и продольное увеличения.

#### 5.3.1. Вывод зависимости между положением и размером предмета и изображения

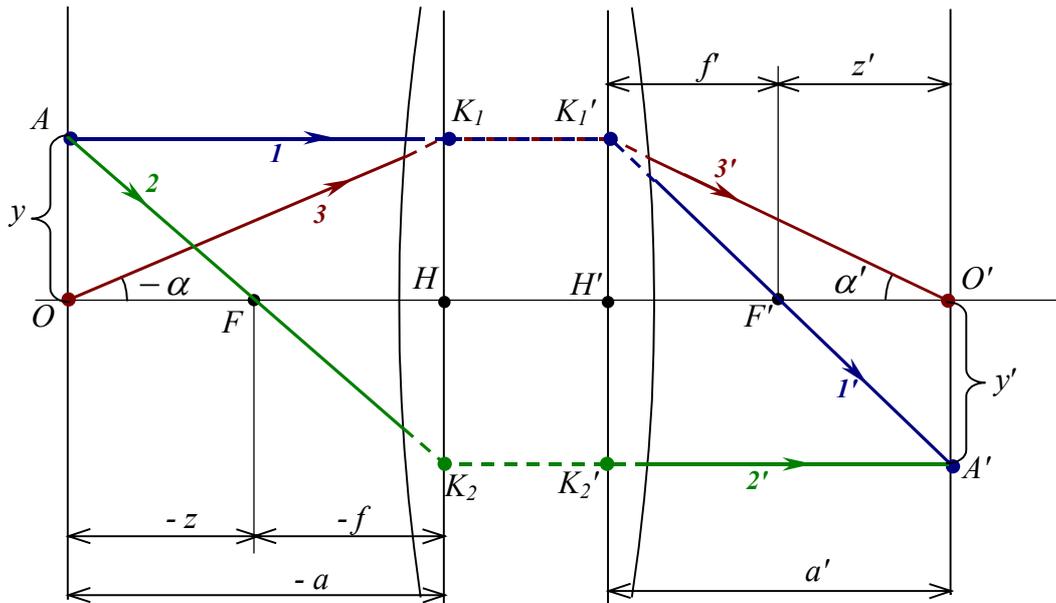


Рис.5.3.1. Схема для вывода основных соотношений параксиальной оптики.

Для вывода зависимости между положением и размером предмета и изображения воспользуемся рис.5.3.1.  $\triangle OAF$  подобен  $\triangle FHK_2$ , следовательно:

$$\frac{y}{-y'} = \frac{-z}{f'}, \text{ откуда } \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z}$$

Тогда, в соответствии с выражением (5.2.1), линейное увеличение можно выразить следующим образом:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} \quad (5.3.1)$$

Аналогично, из подобия треугольников  $\triangle H'K_1'F'$  и  $\triangle F'O'A'$  можно получить выражение:

$$\beta = -\frac{z'}{f'} \quad (5.3.2)$$

Таким образом, увеличение можно выразить как через передние, так и через и задние отрезки. Отсюда можно получить **формулу Ньютона**:

$$\| z \cdot z' = f \cdot f' \quad (5.3.3)$$

Если оптическая система находится в однородной среде ( $n = n'$ ), то  $f = -f'$ , и формула Ньютона получает вид:

$$z \cdot z' = -f'^2 \quad (5.3.4)$$

Выразим  $z$  и  $z'$  через фокусные расстояния и передний ( $-a$ ) и задний ( $a'$ ) отрезки:

$$z' = a' - f'$$

$$z = a - f$$

Тогда выражение (5.3.3) можно записать в виде:

$$(a - f) \cdot (a' - f') = f \cdot f'$$

После преобразований получим выражение, связывающее фокусные расстояния и передний и задний отрезки (**формула отрезков** или **формула Гаусса**):

$$\| \frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1 \quad (5.3.5)$$

### 5.3.2. Угловое увеличение и узловые точки

Теперь рассмотрим угловое увеличение, опять воспользовавшись рис.5.3.1. Из  $\triangle OK_1H$ , видно, что:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{y}{-a} = \alpha, \text{ отсюда } -\alpha = \frac{y}{-a}$$

Аналогично можно вывести выражение:

$$\alpha' = \frac{y}{a'}$$

Теперь можно выразить угловое увеличение через передний и задний отрезки:

$$W = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{y \cdot a}{y \cdot a'} = \frac{a}{a'} = \frac{f + z}{f' + z'} \quad (5.3.6)$$

Выразим  $z'$  из формулы Ньютона (5.3.3), тогда после преобразований получим выражение для вычисления углового увеличения:

$$\| W = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'} \quad (5.3.7)$$

Из выражения (5.3.7) следует, что если выбрать плоскости предмета и изображения таким образом, что  $z = f'$  и  $z' = f$ , то в точках пересечения этих плоскостей с осью угловое увеличение равно единице. Такие точки называются **узловыми точками**.

Чтобы найти узловые точки  $N$  и  $N'$ , от переднего фокуса откладывается заднее фокусное расстояние, а от заднего фокуса откладывается переднее фокусное расстояние (рис.5.3.2). Отрезки  $NN'$  и  $HH'$  равны. Если  $-f' = f$  ( $n = n'$ ), то узловые точки совпадают с главными.

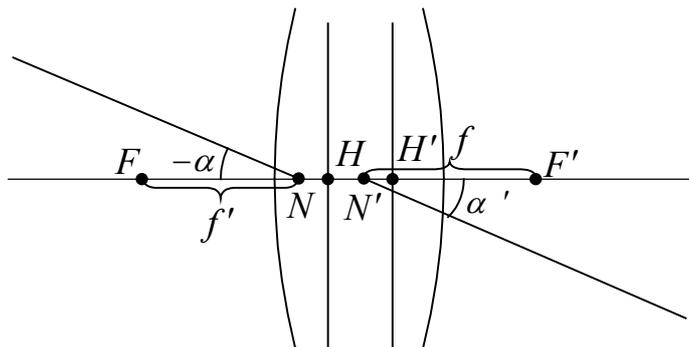


Рис.5.3.2. Узловые точки.

Следствием выражений (5.3.2) и (5.3.7) является следующее соотношение:

$$\beta \cdot W = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \quad (5.3.8)$$

### 5.3.3. Частные случаи положения предмета и изображения

Рассмотрим различные положения предмета и изображения (различные  $z$  и  $z'$ ):

- $z = -f$ . Тогда  $z' = -f'$ , линейное увеличение  $\beta = 1$ , следовательно, предмет и изображение – это главные плоскости. Угловое увеличение

$$W = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$$

- $z = f'$ . Тогда  $z' = f$ , угловое увеличение  $W = 1$ , следовательно, предмет и изображение – это узловые точки. Линейное увеличение  $\beta = -\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'}$ .

- $z = f$ . Тогда  $z' = f'$ , линейное увеличение  $\beta = -1$ , угловое увеличение  $W = \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$ , следовательно, предмет находится на двойном фокусном расстоянии, то есть расстояние между предметом и изображением минимально.

- $z = 0$ . Тогда  $z' = \infty$ , линейное увеличение  $\beta = -\infty$ , угловое увеличение  $W = 0$ , следовательно, предмет находится в переднем фокусе, а изображение – в бесконечности.
- $z' = 0$ . Тогда  $z = -\infty$ , линейное увеличение  $\beta = 0$ , угловое увеличение  $W = \infty$ , следовательно, предмет находится на бесконечности, а изображение – в заднем фокусе.

#### 5.3.4. Связь продольного увеличения с поперечным и угловым

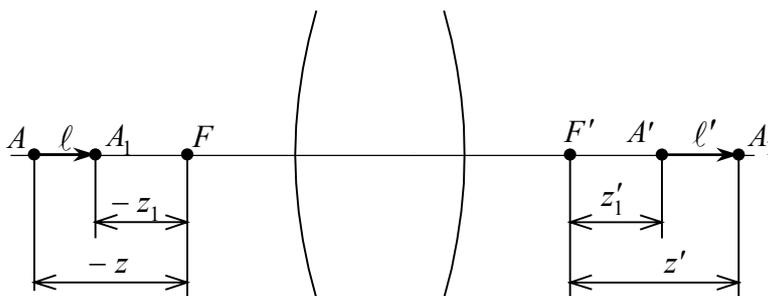


Рис.5.3.3. Связь продольного увеличения с поперечным и угловым.

Рассмотрим рис.5.3.3. Длину отрезков  $\ell$  и  $\ell'$  можно выразить следующим образом:

$$\ell = z_1 - z$$

$$\ell' = z' - z_1'$$

По определению продольного увеличения (5.2.4):

$$Q = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{z' - z_1'}{z_1 - z}$$

После преобразований, с учетом выражений (5.3.1) и (5.3.2), получим:

$$Q = -\frac{f'}{f} \cdot \beta \cdot \beta_1 \quad (5.3.9)$$

где  $\beta$  и  $\beta_1$  – поперечные (линейные) увеличения в точках  $A'$  и  $A_1'$ .

Или, с учетом выражения (5.2.5):

$$Q = \frac{n'}{n} \cdot \beta \cdot \beta_1 \quad (5.3.10)$$

Теперь рассмотрим продольное увеличение для бесконечно малых отрезков ( $\ell \rightarrow 0$ ,  $\ell' \rightarrow 0$ ) (по определению это и есть продольное увеличение). В этом случае линейное увеличение в точках  $A'$  и  $A_1'$  будет одинаковым, следовательно:

$$Q_{\ell \rightarrow 0} = \frac{n'}{n} \cdot \beta^2 = \frac{f'}{f} \cdot \beta^2 \quad (5.3.11)$$

Из выражения (5.3.8) можно получить:

$$W = -\frac{f}{f'} \cdot \beta^{-1} = \frac{n}{n'} \cdot \beta^{-1} \quad (5.3.12)$$

Если оптическая система находится в однородной среде ( $n' = n$ ), то:

$$Q = \beta^2, \quad W = \beta^{-1} \quad (5.3.13)$$

То есть продольное увеличение равно квадрату линейного увеличения, а угловое обратно пропорционально ему.

### 5.3.5. Диоптрийное исчисление

**Диоптрийное исчисление** – это измерение продольных отрезков в обратных единицах (диоптриях):

$$D = \left( \frac{a}{n} \right)^{-1}, \quad [\text{дптр}]$$

где  $\frac{a}{n}$  – приведенная длина.

Одна диоптрия соответствует приведенному отрезку в 1м. Если отрезок измеряется в мм, то обратный отрезок измеряется в килодиоптриях.

Используя формулу отрезков (5.3.5) и выражение (5.2.5) можно получить важное соотношение для приведенных отрезков в пространстве предметов и изображений и оптической силы, измеряемых в диоптриях:

$$\frac{n'}{a'} = \frac{n}{a} + \frac{n'}{f'}$$

или

$$D' = D + \Phi \quad (5.3.14)$$

где  $D$  и  $D'$  – приведенные передний и задний отрезки в диоптриях. То есть оптическая система увеличивает приведенный отрезок в пространстве изображений (в дптр) на величину оптической силы.

### 5.3.6. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца

Инвариант Лагранжа-Гельмгольца связывает линейный размер предмета и угловой размер пучка лучей (рис.5.3.4). Эта величина инвариантна, то есть неизменна в любом пространстве.

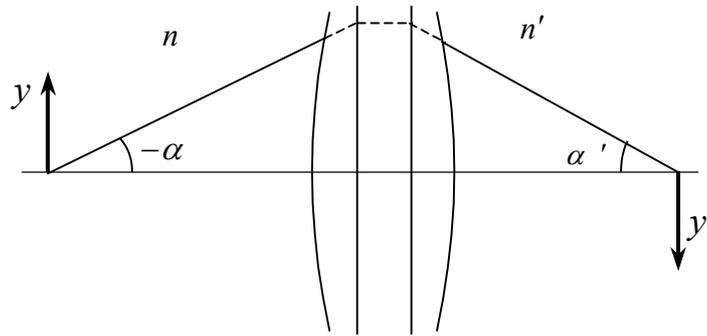


Рис.5.3.4. Величины, которые связывает инвариант Лагранжа-Гельмгольца.

Для вывода этого инварианта воспользуемся выражением (5.3.8), связывающим угловое и линейное увеличения. Тогда воспользовавшись выражениями (5.2.1) и (5.2.3), определяющими линейное и угловое увеличения, получим следующее соотношение:

$$\frac{\alpha' \cdot y'}{\alpha \cdot y} = \frac{n}{n'} \quad (5.3.15)$$

Выражение (5.3.15) можно преобразовать, и тогда получим **инвариант Лагранжа-Гельмгольца**:

$$\alpha \cdot y \cdot n = \alpha' \cdot y' \cdot n' \quad (5.3.16)$$

Инвариант Лагранжа-Гельмгольца характеризует информационную емкость оптической системы, то есть величину пространства, которое может быть отображено оптической системой. Этот инвариант математически выражает закон сохранения информации в геометрической оптике.

## 6. Матричная теория Гауссовой оптики

### 6.1. Преобразование координат лучей оптической системой

Основное действие оптической системы заключается в изменении хода лучей, которое описывается преобразованиями двух параметров – линейной и угловой координат луча. Эти преобразования наиболее удобно описывать при помощи аппарата **матричной оптики**. Матрица преобразования полностью описывает распространение лучей через оптическую систему.

#### 6.1.1. Координаты лучей в пространстве предметов и пространстве изображений

Параметры луча в пространстве предметов и изображений могут быть заданы только в том случае, если выбраны опорные плоскости. **Опорная плоскость** (ОП) – это некоторая произвольно выбранная плоскость, перпендикулярная оптической оси. Опорные плоскости в пространстве предметов и изображений выбираются из соображений удобства и могут быть либо сопряженными, либо нет.

На рис.6.1.1 показаны линейная координата луча  $y$  и угловая координата луча  $\alpha$ .

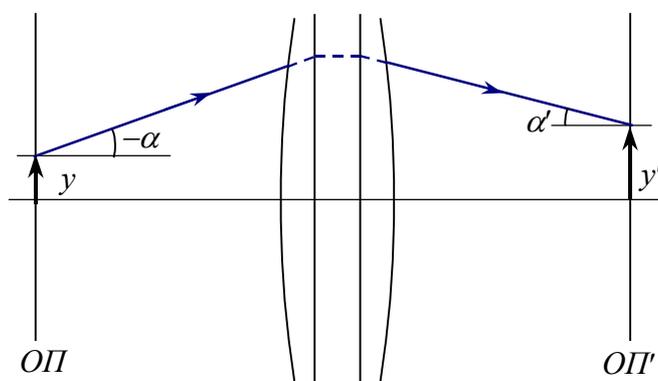


Рис.6.1.1. Координаты луча.

Вместо угла  $\alpha$  часто используют направляющий косинус  $Y$  оптического лучевого вектора:

$$Y = n \cdot \cos \beta_y = -n \cdot \sin \alpha = -n \cdot \alpha$$

где  $\beta_y$  – угол между лучом и осью  $y$ ,  $n \cdot \alpha$  – приведенный угол.

Для лучей в меридиональной плоскости направляющий косинус  $X = 0$ , таким образом, в параксиальной оптике луч может быть однозначно определен через линейную координату  $y$  и угловую координату  $Y = -n \cdot \alpha$ :

$$\begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

Аналогично, луч в пространстве изображений описывается линейной координатой  $y'$  и угловой координатой  $Y' = -n' \cdot \alpha'$ :

$$\begin{pmatrix} y' \\ Y' \end{pmatrix} \quad (6.1.2)$$

### 6.1.2. Преобразование координат оптических лучей

Действие оптической системы заключается в преобразовании координат лучей:

$$\begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \rightarrow (OC) \rightarrow \begin{pmatrix} y' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Разложим выходные координаты луча в ряд:

$$y' = a_0 + a_1 y + a_2 Y + a_3 y^2 + a_4 yY + a_5 Y^2 + \dots$$

$$Y' = b_0 + b_1 y + b_2 Y + b_3 y^2 + b_4 yY + b_5 Y^2 + \dots$$

Если оптическая система является центрированной, то  $a_0 = b_0 = 0$ . Все члены ряда, начиная с  $a_3$  и  $b_3$ , можно отбросить, так как они стремятся к нулю на порядок быстрее, чем предыдущие. Таким образом, для идеальной оптической системы:

$$\begin{cases} y' = Ay + BY \\ Y' = Cy + DY \end{cases} \quad (6.1.3)$$

## 6.2. Матрица преобразования лучей

### 6.2.1. Общий вид матрицы преобразования (ABCD-матрица)

Выражение (6.1.3) для преобразования линейной и угловой координат луча, рассмотренные в параграфе 6.1, можно записать в матричной форме, тогда преобразование координат луча оптической системой можно представить в виде умножения некоторой матрицы вектора на вектор входных координат луча:

$$\begin{cases} y' \\ Y' \end{cases} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

Все свойства идеальной оптической системы полностью описываются **матрицей преобразования лучей  $G$** , называемой также **гауссовой матрицей** или ABCD-матрицей:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

Выражение (6.2.1) можно также записать в виде:

$$b' = G \cdot b \quad (6.2.3)$$

где  $b$  – вектор-столбец входных координат,  $b'$  – вектор-столбец выходных координат,  $G$  – матрица, описывающая оптическую систему.

### 6.2.2. Геометрический смысл элементов матрицы преобразования

Рассмотрим луч с координатами  $y = 1$ ,  $Y = 0$  (рис.6.2.1).

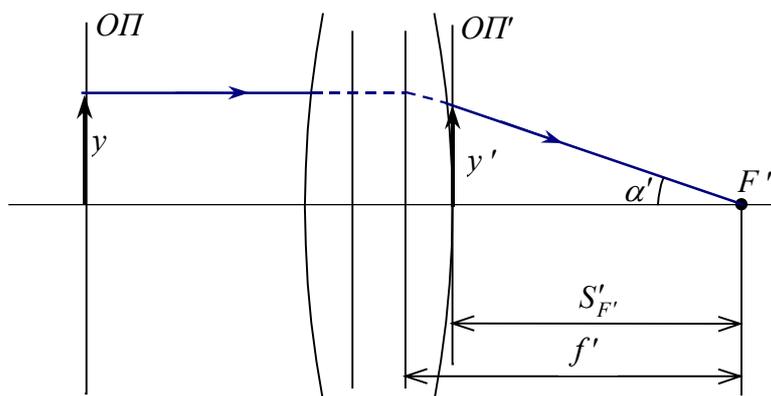


Рис.6.2.1. Схема для нахождения элементов  $A$  и  $C$  матрицы преобразования.

Подставив в выражение (6.1.3) значения  $y$  и  $Y'$ , получим:

$$\begin{aligned} y' &= Ay + BY = A \\ Y' &= Cy + DY = C \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Из рис.6.2.1 видно, что:

$$f' = \frac{y}{\alpha'}, \quad S'_{F'} = \frac{y'}{\alpha'}$$

Отсюда с учетом того, что  $y = 1$ , можно получить выражения для  $y'$  и  $Y'$ :

$$\begin{aligned} y' &= S'_{F'} \cdot \alpha' = \frac{S'_{F'}}{f'} \\ Y' &= -n' \alpha' = -\frac{n'}{f'} \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Таким образом, подставив выражения (6.2.5) в (6.2.4), мы получим два элемента матрицы преобразования:

$$A = \frac{S'_{F'}}{f'} \quad (6.2.6)$$

$$C = -\frac{n'}{f'} = -\Phi$$

Теперь рассмотрим луч с входной координатой  $Y = 1$  ( $\alpha = -\frac{1}{n}$ ) и выходной координатой  $Y' = 0$  ( $\alpha' = 0$ ) (рис.6.2.2).

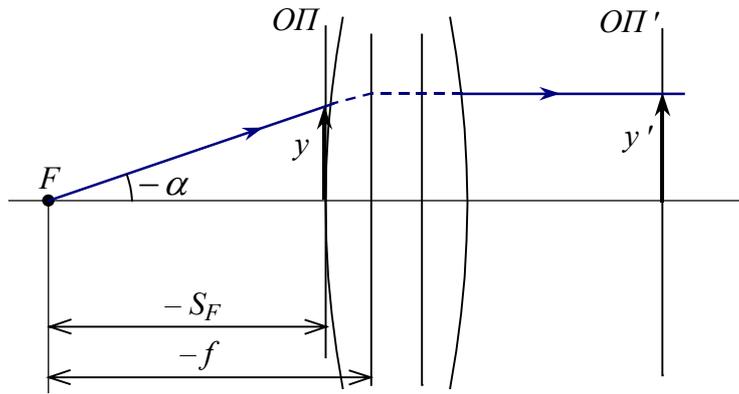


Рис.6.2.2. Схема для нахождения элементов  $B$  и  $D$  матрицы преобразования.

Подставив в выражение (6.1.3) значения  $y$  и  $Y'$ , получим:

$$y' = Ay + BY = Ay + B \quad (6.2.7)$$

$$Y' = Cy + DY = Cy + D = 0$$

Из рис.6.2.2 найдем входную и выходную линейные координаты:

$$y' = -\alpha \cdot (-f) = -\frac{f}{n} \quad (6.2.8)$$

$$y = -\alpha \cdot (-S_F) = -\frac{S_F}{n}$$

Из выражений (6.2.7) и (6.2.8) можно получить еще два элемента матрицы преобразования:

$$D = -Cy = -\left(-\frac{n'}{f'}\right) \cdot \left(-\frac{S_F}{n}\right) = \frac{n}{f} \cdot \frac{S_F}{n} = \frac{S_F}{f} \quad (6.2.9)$$

$$B = y' - Ay = -\frac{f}{n} - \frac{S'_{F'}}{f'} \cdot \left(\frac{S_F}{n}\right) = \frac{S_F \cdot S'_{F'}}{n \cdot f'} - \frac{f}{n} = \frac{S_F \cdot S'_{F'} - f \cdot f'}{n \cdot f'}$$

Таким образом матрица преобразования имеет следующий вид:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{S'_{F'}}{f'} & \frac{S_F \cdot S'_{F'} - f \cdot f'}{n \cdot f'} \\ -\Phi = -\frac{n'}{f'} & \frac{S_F}{f} \end{pmatrix} \quad (6.2.10)$$

Элемент матрицы  $C$  зависит только от параметров оптической системы, а элементы  $A$ ,  $B$  и  $D$  зависят еще и от выбора опорных плоскостей.

### Определитель матрицы преобразования

Определитель матрицы преобразования любой оптической системы равен единице:

$$\det G = AD - BC = 1 \quad (6.2.11)$$

### Обратная матрица преобразования

По определению обратной матрицы должно выполняться следующее равенство:

$$G^{-1}G = GG^{-1} = I \quad (6.2.12)$$

где  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  – единичная матрица.

Обратная матрица преобразования описывает обратное преобразование (из выходных координат во входные):

$$b = G^{-1} \cdot b' \quad (6.2.13)$$

или

$$\begin{pmatrix} y \\ Y \end{pmatrix} = G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ Y' \end{pmatrix}$$

Обратная матрица преобразования имеет следующий вид:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad (6.2.14)$$

### Условие сопряжения опорных плоскостей

В общем случае все элементы матрицы преобразования не равны нулю, но для случая сопряженных опорных плоскостей элемент  $B = 0$ .

### 6.2.3. Виды матриц преобразования

Существуют два основных вида матриц преобразования, описывающих два простых преобразования – перенос луча в свободном пространстве и преломление луча на преломляющей поверхности или в оптической системе.

#### Матрица преломления

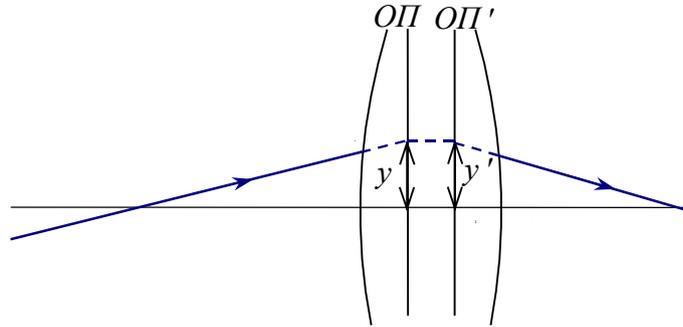


Рис.6.2.3. Преломление луча.

Для вывода матрицы преломления совместим опорные плоскости с главными плоскостями ( $ОП = H$ ,  $ОП' = H'$ ). Из рисунка (6.2.3) видно, что  $y = y'$ . Поскольку опорные плоскости сопряжены, то  $B = 0$  и  $y' = Ay$ . Тогда  $A = 1$ , а поскольку определитель матрицы всегда равен единице  $\det G = AD - BC = 1$ , следовательно  $D = 1$ .

В данном случае матрица преобразования имеет смысл **матрицы преломления**:

$$\mathbb{R} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.15)$$

Матрица преломления описывает преломление луча оптической системой, при этом у луча изменяется только угловая координата:

$$\begin{aligned} y' &= y \\ Y' &= -\Phi y + Y \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

#### Матрица переноса

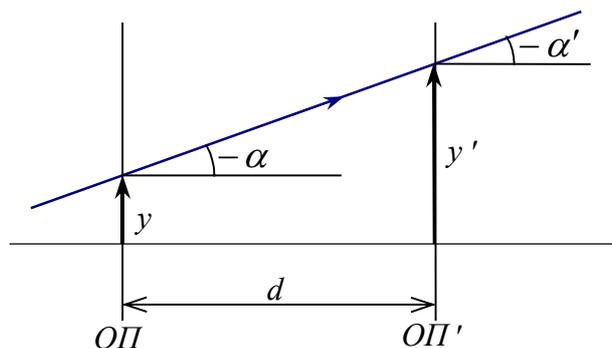


Рис.6.2.4. Перенос луча.

При переносе луча изменяется только линейная координата. Из рис. 6.2.4 видно, что:

$$y' = y + (-\alpha) \cdot d = y + \frac{Y}{n} \cdot d \quad (6.2.17)$$

Угловая координата не изменяется:

$$Y' = Y$$

В данном случае матрица преобразования имеет смысл **матрицы переноса**:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.18)$$

где  $\frac{d}{n}$  – приведенное расстояние между опорными плоскостями.

#### 6.2.4. Матрица одной преломляющей поверхности

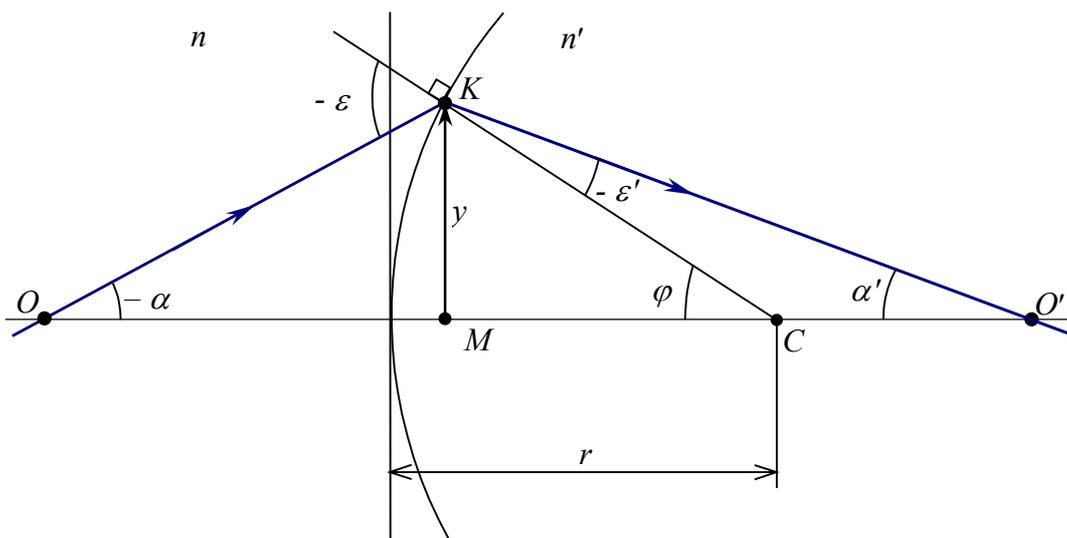


Рис.6.2.5. Преломляющая поверхность.

Рассмотрим рис.6.2.5. Из треугольников  $\Delta OKC$  и  $\Delta CKO'$  можно вывести:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= -\alpha + \varphi \\ -\varepsilon' &= -\alpha' + \varphi \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Домножим оба выражения на  $n$  и  $n'$  соответственно:

$$\begin{aligned} -n\varepsilon &= -n\alpha + n\varphi \\ -n'\varepsilon' &= -n'\alpha' + n'\varphi \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

Из закона преломления (3.1.5) следует, что  $n\varepsilon = n'\varepsilon'$ , следовательно:

$$-n\alpha + n\varphi = -n'\alpha' + n'\varphi$$

Угол  $\varphi$  можно найти из  $\Delta\hat{E}IC$  :

$$\varphi = \frac{y}{r} \quad (6.2.21)$$

Тогда, с учетом того, что  $-n\alpha = Y$ ,  $-n'\alpha' = Y'$ , можно получить итоговое выражение для преобразования угловой координаты луча при преломлении на сферической поверхности:

$$Y' = Y - \frac{y}{r}(n' - n) \quad (6.2.22)$$

или

$$Y' = Y - y \cdot \rho \cdot (n' - n)$$

где  $\rho$  – кривизна поверхности.

Поскольку в матрице преломления  $Y' = Y + Cy$ , элемент матрицы  $C = -\rho \cdot (n' - n)$ . Кроме того,  $C = -\Phi$ , следовательно, оптическая сила сферической преломляющей поверхности:

$$\Phi = \rho \cdot (n' - n) \quad (6.2.23)$$

В этом случае опорные плоскости совпадают с главными плоскостями, и составляют одну плоскость, касательную к поверхности.

Итак, матрица преломления сферической поверхности выглядит следующим образом:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho(n' - n) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.24)$$

### 6.2.5. Матрица зеркальной (отражающей) поверхности

Рассмотрим зеркальную поверхность (рис.6.2.6).

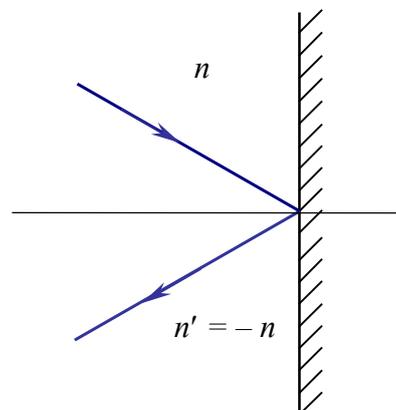


Рис.6.2.6. Зеркальная поверхность.

Если поверхность является отражающей, то  $n' = -n$ , следовательно оптическая сила зеркальной поверхности:

$$\Phi = -\rho(n' - n)n' = -2\rho n \quad (6.2.25)$$

Тогда матрица преломления зеркальной поверхности:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\rho n & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.26)$$

где  $\rho$  – кривизна поверхности,  $n$  – показатель преломления среды.

В случае плоского зеркала ( $\rho = 0$ ) матрица отражения единичная:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.27)$$

Следовательно, плоское зеркало не меняет хода луча (геометрический косинус изменяется, а оптический преломленный (отраженный) косинус остается прежним).

### 6.3. Матрицы оптической системы, состоящей из нескольких компонентов

Любую оптическую систему можно представить как совокупность нескольких компонентов, разделенных промежутками. Пусть дана некоторая произвольная система, в которой для каждого компонента известно положение главных плоскостей и оптическая сила, а также известны расстояния между компонентами и показатели преломления (на рис.6.3.1 указаны расстояния непосредственно между главными плоскостями компонентов).

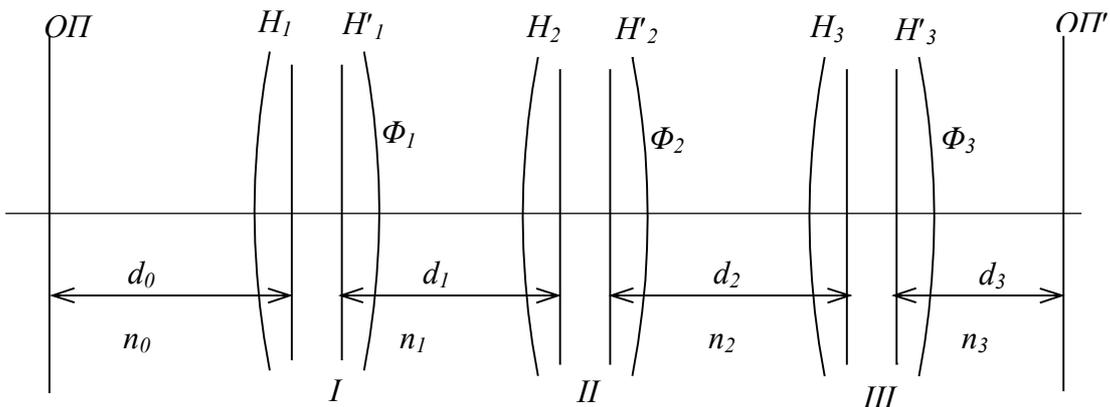


Рис.6.3.1. Оптическая система из нескольких компонентов.

Матрица такой системы будет состоять из произведения матриц преломления  $R_n$  и переноса  $T_n$  для отдельных компонентов:

$$G = R_3 T_3 R_2 T_2 R_1 T_1 T_0 = R_n T_n \dots R_1 T_1 T_0 \quad (6.3.1)$$

$$\text{где } R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_n & 1 \end{pmatrix}, T_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_n}{n_n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждый из компонентов может быть разложен по этой же схеме на более простые составляющие (вплоть до отдельных поверхностей).

Если между компонентами нет промежутков ( $d_n = 0$ ), то матрица переноса между этими компонентами становится единичной  $T_n = I$ , и ее можно не учитывать. Если оптическая сила компонента равна нулю  $\Phi_n = 0$ , то матрица преломления для этого компонента также становится единичной  $R_n = I$ .

### 6.3.1. Пакет из плоскопараллельных слоев

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из компонентов, оптическая сила которых равна нулю  $\Phi = 0$  (рис.6.3.2).

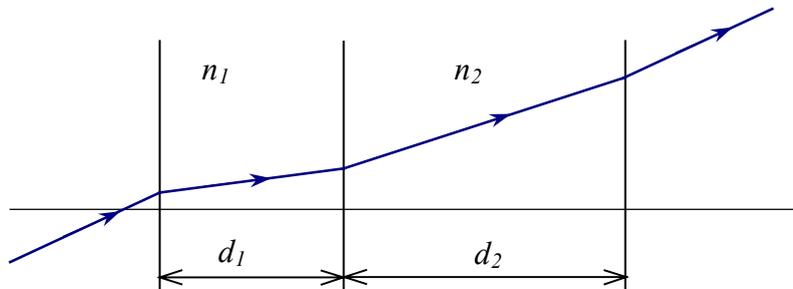


Рис.6.3.2. Пакет из плоскопараллельных слоев.

Матрица такой системы состоит только из матриц переноса:

$$G = T_2 T_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_2}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d_1}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left( \frac{d_1}{n_1} + \frac{d_2}{n_2} \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.2)$$

Приведенные толщины всех элементов складываются, и могут быть заменены общей приведенной толщиной:

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_n = \frac{d_1}{n_1} + \frac{d_2}{n_2} + \dots + \frac{d_n}{n_n} \quad (6.3.3)$$

Действие на проходящие лучи пакета слоев с разными геометрическими толщинами и показателями преломления эквивалентно одному слою, толщина которого равна приведенной толщине.

Таким образом, приведенная матрица переноса для пакета из плоскопараллельных слоев будет выглядеть так:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

### 6.3.2. Оптическая система с нулевыми расстояниями между компонентами

Рассмотрим оптическую систему, в которой расстояния между компонентами равны нулю  $d = 0$ . Матрица такой системы:

$$G = R_2 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Phi_1 + \Phi_2) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

То есть оптические силы таких компонент складываются:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n \quad (6.3.6)$$

### 6.3.3. Двухкомпонентная оптическая система

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из двух компонентов, разделенных ненулевым промежутком.

Матрица такой системы:

$$G = R_2 D R_1 \quad (6.3.7)$$

Оптическая сила:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_1 \Phi_2 \frac{d}{n} \quad (6.3.8)$$

Рассмотрим частные случаи двухкомпонентной системы.

- Если  $d = 0$ , тогда  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ .
- Если  $t = \frac{d}{n} = \frac{1}{\Phi_1}$ , это значит, что второй компонент (его главная плоскость) находится в заднем фокусе первого компонента. Тогда  $\Phi = \Phi_1$ , то есть второй компонент может иметь какую угодно оптическую силу.
- Если  $t = \frac{d}{n} = \frac{1}{\Phi_2}$ , то первый компонент находится в переднем фокусе второго компонента, тогда  $\Phi = \Phi_2$ .
- Если  $t = \frac{d}{n} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_1 \Phi_2} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2}$ , тогда  $\Phi = 0$ .

## Афокальные (телескопические) системы

**Афокальные или телескопические системы** – это системы из двух или более компонентов, оптическая сила которых равна нулю. Такие системы предназначены для наблюдения удаленных объектов.

У афокальных систем оптическая сила равна нулю, то есть  $C = -\Phi = 0$ , следовательно, определитель матрицы  $\det G = AD - BC = AD = 1$ . Отсюда  $D = A^{-1}$ . Тогда матрица  $G$  будет выглядеть следующим образом:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

Если опорные плоскости сопряжены, то  $B = 0$ , и следовательно:

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} \quad (6.3.10)$$

Тогда координаты луча:

$$\begin{aligned} y' &= Ay + BY = Ay \\ Y' &= Cy + DY = A^{-1}Y \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

Из выражения (6.3.11) видно, что для афокальной системы элемент  $A$  матрицы равен линейному (поперечному) увеличению, а его обратная величина имеет смысл углового увеличения:

$$A = \frac{y'}{y} = \beta \quad (6.3.12)$$

$$A^{-1} = \frac{Y'}{Y} = \frac{-n'\alpha'}{-n\alpha} = \frac{n'}{n}W \quad (6.3.13)$$

В телескопических системах линейное и угловое увеличение не зависят от положения сопряженных опорных плоскостей и, следовательно, не зависят от положения предмета и изображения:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \text{const} = A \\ \frac{\alpha'}{\alpha} &= \text{const} = A^{-1} \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Двухкомпонентная оптическая система телескопическая, если задний фокус первого компонента совпадает с передним фокусом второго (рис.6.3.3):

$$t = \frac{d}{n} = \frac{1}{\Phi_1} + \frac{1}{\Phi_2} \quad (6.3.15)$$

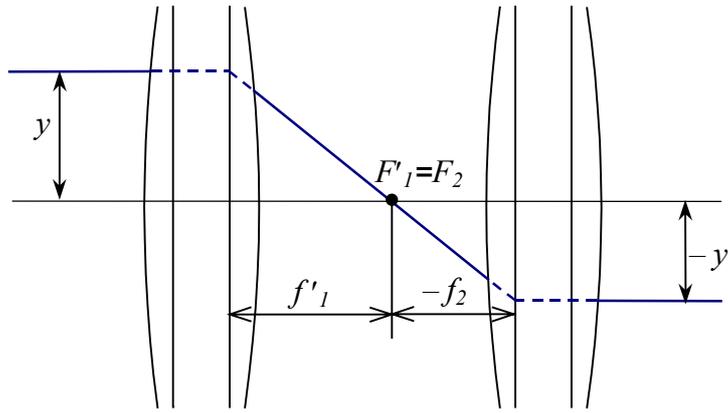


Рис.6.3.3. Положение фокусов компонентов телескопической системы.

Линейное увеличение такой системы:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{f_2}{f'_1} \quad (6.3.16)$$

### Матрица тонкой линзы

Рассмотрим линзу в воздухе. Такую линзу можно рассматривать как двухкомпонентную систему, состоящую из двух поверхностей, разделенных промежутком  $d$  (рис.6.3.4).

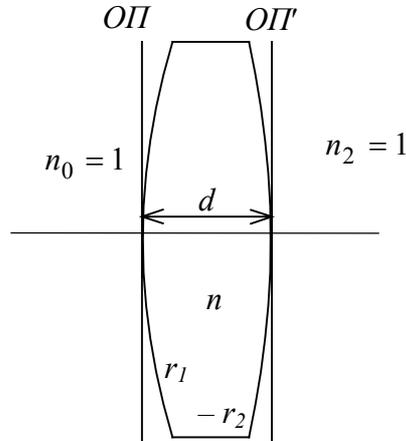


Рис.6.3.4. Линза в воздухе.

Для линзы в воздухе  $T_0 = T_2 = I$ , следовательно  $G = R_2 T_1 R_1$ . Тогда матрица преобразования линзы в общем случае будет выглядеть следующим образом:

$$G = R_2 T_1 R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_2(n-1) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho_1(1-n) & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.17)$$

У **тонкой линзы** толщина по оси равна нулю  $d = 0$  ( $d \ll |r_1; r_2|$ ). У такой линзы матрица преобразования:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.18)$$

где  $\Phi = (\rho_1 - \rho_2)(n - 1)$  – оптическая сила тонкой линзы,  $\rho_1, \rho_2$  – кривизны поверхностей.

#### 6.3.4. Расчет параксиальных (нулевых) лучей через оптическую систему

**Нулевые лучи** – это лучи, которые преломляются по законам параксиальной оптики, но имеют произвольно большие координаты.

Расчет нулевых лучей через оптическую систему состоит из операций переноса луча между компонентами и преломления луча на компонентах, которые можно описывать либо в матричной форме (6.2.3), (6.3.1), либо в виде рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} y &= y + \frac{d}{n} Y \\ Y &= Y - \Phi y \end{aligned} \quad (6.3.19)$$

Например,  $y_1 = y_0 + \frac{d_0}{n_0} Y_0$  – перенос до первого компонента,  $Y_1 = Y_0 - \Phi_1 y_0$

– преломление после первого компонента.

Вычисления согласно выражениям (6.3.19) выполняются столько раз, сколько компонентов имеется в оптической системе. Однако, для полного расчета лучей через оптическую систему вначале нужно определить координаты лучей в пространстве предметов, а после завершения расчетов определить координаты лучей в пространстве изображений. Таким образом, расчет нулевых (параксиальных) лучей включает в себя три этапа:

- определение входных координат луча,
- вычисление хода луча (последовательное определение его координат на всех компонентах),
- определение выходных координат луча.

## 7. Реальные оптические системы. Ограничения пучков

### 7.1. Реальные (действительные) лучи

Через реальную оптическую систему в отличие от идеальной проходят реальные лучи, а не нулевые (параксиальные). Ход реального луча отличается от хода нулевого (идеального) луча. Отклонение хода реального луча от идеального связано со строгим выполнением законов преломления и отражения на реальных поверхностях оптических систем.

#### Отличия реальной оптической системы от идеальной:

- В реальной оптической системе происходит ограничение пучков, то есть не все существующие лучи проходят через оптическую систему и достигают пространства изображений. Проходящие пучки лучей имеют конечные размеры.
- Ход лучей, проходящих через оптическую систему, не совпадает с ходом идеальных лучей (реальные оптические системы обладают аберрациями).

**Аберрации лучей** (лат. – отклонение) – отклонение хода реального луча от идеального.

#### 7.1.1. Расчет хода реальных лучей

Рассмотрим ход реальных лучей в меридиональной плоскости (рис.7.1.1).

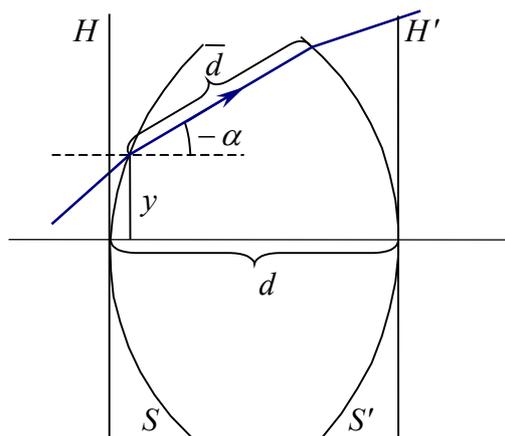


Рис.7.1.1. Ход реального луча.

Реальные лучи, в отличие от нулевых, преломляются не на главных плоскостях  $H$  и  $H'$ , а на реальных оптических поверхностях  $S$  и  $S'$ .

Формулы расчета реального луча похожи на расчет нулевого луча (параграф 6.3.4) и состоят из переноса и преломления:

$$y = y + \frac{\bar{d}}{n} Y \quad (7.1.1)$$

$$Y = Y - \bar{\Phi} y$$

где  $\bar{d}$  – расстояние вдоль луча между поверхностями (косая толщина),  
 $\bar{\Phi}$  – оптическая сила поверхности в точке преломления луча.

Оптическая сила поверхности в параксиальной области вычисляется при помощи выражения:

$$\Phi = \rho(n' - n) \quad (7.1.2)$$

Для вычисления силы поверхности реального луча необходимо учитывать углы падения  $\varepsilon$  и преломления  $\varepsilon'$  реального луча:

$$\bar{\Phi} = \rho(n' \cos \varepsilon' - n \cos \varepsilon) \quad (7.1.4)$$

Для нулевых лучей  $d$  и  $\Phi$  для данной поверхности постоянны, а для реальных лучей они зависят от координат точки пересечения конкретного луча с этой поверхностью. Благодаря отличиям  $\bar{d}$  от  $d$  и  $\bar{\Phi}$  от  $\Phi$ , и тому, что луч преломляется на самих поверхностях, а не на главных плоскостях, появляются отличия в ходе реальных и идеальных лучей – аберрации.

### 7.1.2. Причины «непрохождения» лучей через поверхность

В отличие от параксиальных лучей, которые в любом случае попадают на главную плоскость поверхности, реальные лучи могут либо вообще не встретить поверхность, либо встретить ее в такой точке, которая не соответствует условиям физической или конструктивной реализуемости оптической системы.

#### **Луч не попадает на поверхность**

На рис.7.1.2 показано, что нулевой луч преломляется на главной плоскости поверхности, а реальный луч идет слишком высоко и вообще не встречается с поверхностью. Дальнейший расчет такого луча невозможен (не соответствует условиям физической и математической реализуемости).

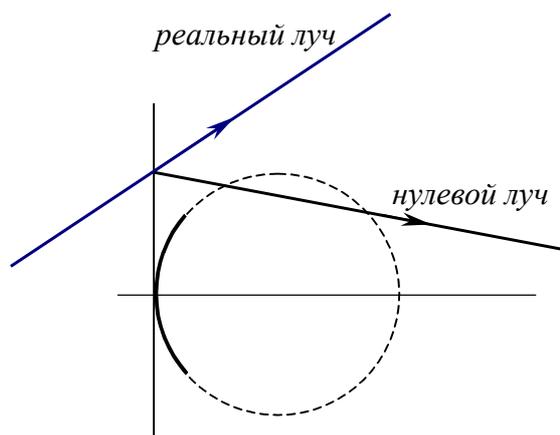


Рис.7.1.2. Реальный луч не попадает на поверхность.

### Полное внутреннее отражение

При падении луча на поверхность, за которой находится среда с показателем преломления меньшим, чем предыдущий (рис.7.1.3), возможно полное внутреннее отражение (параграф 3.1). Нулевой луч в этом случае все равно преломляется на главной плоскости и идет дальше, так как условия его преломления на поверхности не зависят от его координат, а реальный луч полностью отражается и его дальнейший расчет через оптическую систему невозможен.

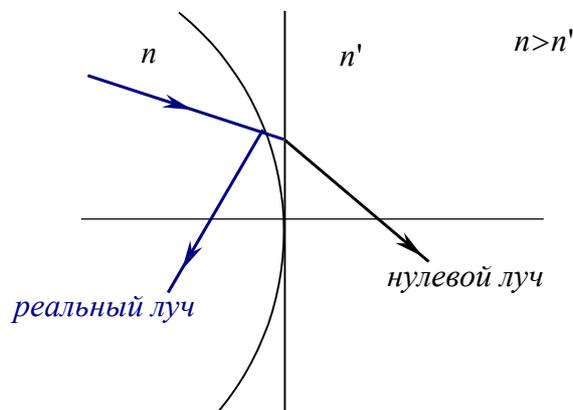
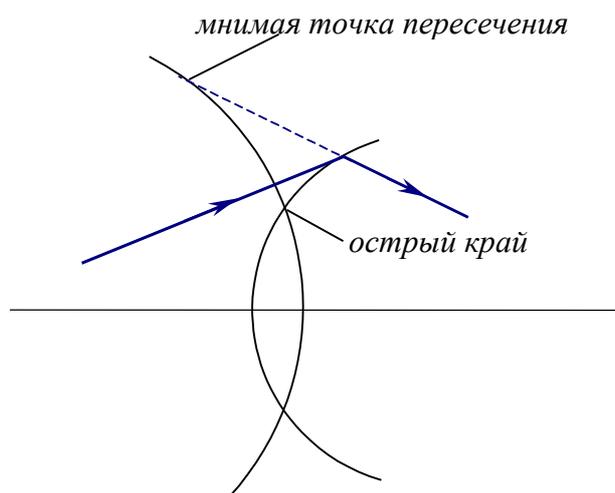


Рис.7.1.3. Полное внутреннее отражение реального луча.

### Луч проходит за острым краем

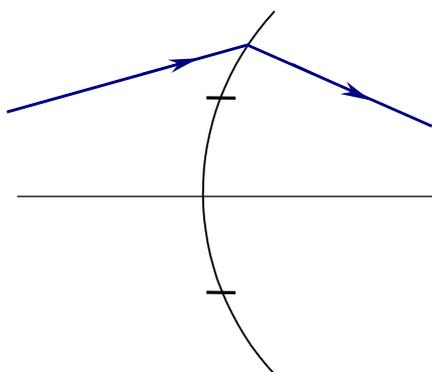
Вполне возможно, что луч оказывается выше точки пересечения поверхностей, это называется прохождением за острым краем. Точка пересечения луча с одной из поверхностей становится мнимой (рис.7.1.4) и возникает ситуация, когда математически расчет луча может быть продолжен, но такая система не может быть физически реализована.



*Рис.7.1.4. Реальный луч проходит за острым краем.*

### **Луч проходит за краем диафрагмы**

Если по конструктивным соображениям габариты поверхностей специально ограничивают диафрагмами, то все лучи, которые не вписываются в заданные габариты (рис.7.1.5), не рассчитываются через систему, хотя математически расчет вполне возможен.



*Рис.7.1.5. Реальный луч проходит за краем диафрагмы.*

В том случае, когда все поверхности в системе ограничены диафрагмами, при расчете лучей учитываются только условия попадания лучей в заданные габариты.

### **7.2. Ограничения пучков лучей**

Ограничения пучков в оптических системах связаны с конечностью физических размеров оптических элементов. Эти ограничения обозначаются на схемах и чертежах в виде диафрагм, роль которых могут играть оправы линз, а также отдельно стоящие диафрагмы.

В принципе диафрагмы могут рассматриваться не только для реальных, но и для нулевых лучей (то есть в параксиальной области). Как правило, в первом приближении анализ габаритов пучков производится в параксиальной области, но впоследствии расчеты обязательно уточняют с использованием реальных лучей.

### 7.2.1. Апертурная диафрагма

Ограничение размера пучков – результат совместного действия всех имеющихся в оптической системе диафрагм. Однако можно выделить одну (наименьшую) диафрагму, и считать, что остальные не ограничивают ход лучей. Такая диафрагма называется апертурной (рис.7.2.1).

**Апертура** (лат. – отверстие) – это понятие, которое в геометрической оптике определяет размер пучка лучей.

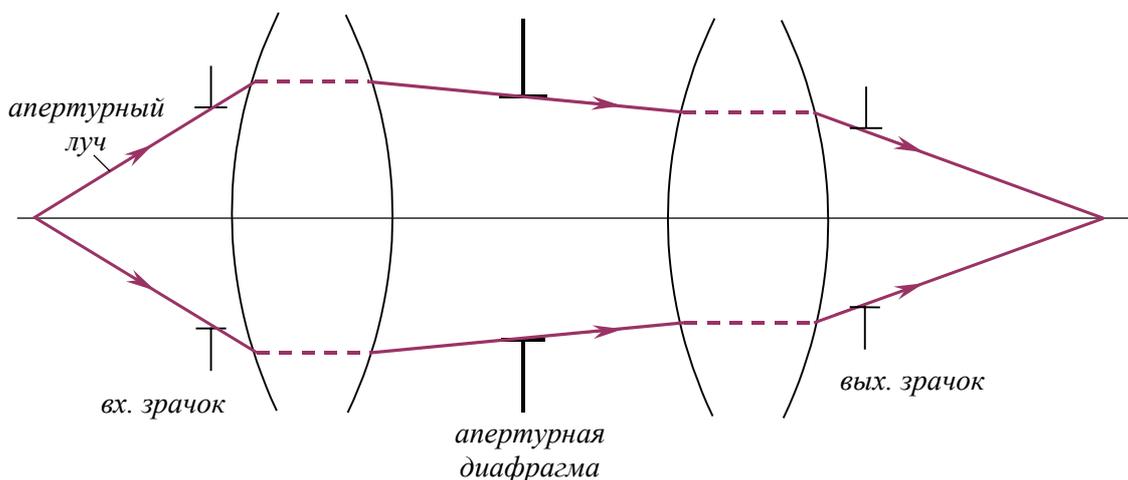


Рис.7.2.1. Апертурная диафрагма.

**Апертурная диафрагма** – это диафрагма, которая ограничивает размер осевого пучка (идушего из осевой точки предмета).

Луч, идущий из осевой точки предмета и проходящий через край апертурной диафрагмы называется **апертурным лучом**.

Рассмотрим апертурную диафрагму и предшествующую ей часть оптической системы:

Параксиальное изображение апертурной диафрагмы в пространстве предметов, сформированное предшествующей частью оптической системы в обратном ходе лучей, называется **входным зрачком оптической системы**.

Если апертурная диафрагма находится в пространстве предметов, то входным зрачком является сама апертурная диафрагма.

**Выходной зрачок** – это парааксиальное изображение апертурной диафрагмы в пространстве изображений, сформированное последующей частью оптической системы в прямом ходе лучей.

Если апертурная диафрагма находится в пространстве изображений, то выходным зрачком является сама апертурная диафрагма.

Входной зрачок, выходной зрачок и апертурная диафрагма сопряжены. Апертурный луч внутри системы проходит через край апертурной диафрагмы, в пространстве предметов – через край входного зрачка, а в пространстве изображений – через край выходного зрачка.

**Главный луч** – это луч, идущий из внеосевой точки предмета и проходящий через центр апертурной диафрагмы.

По законам парааксиальной оптики главный луч также проходит через центр входного зрачка в пространстве предметов и через центр выходного зрачка в пространстве изображений (рис.7.2.2).

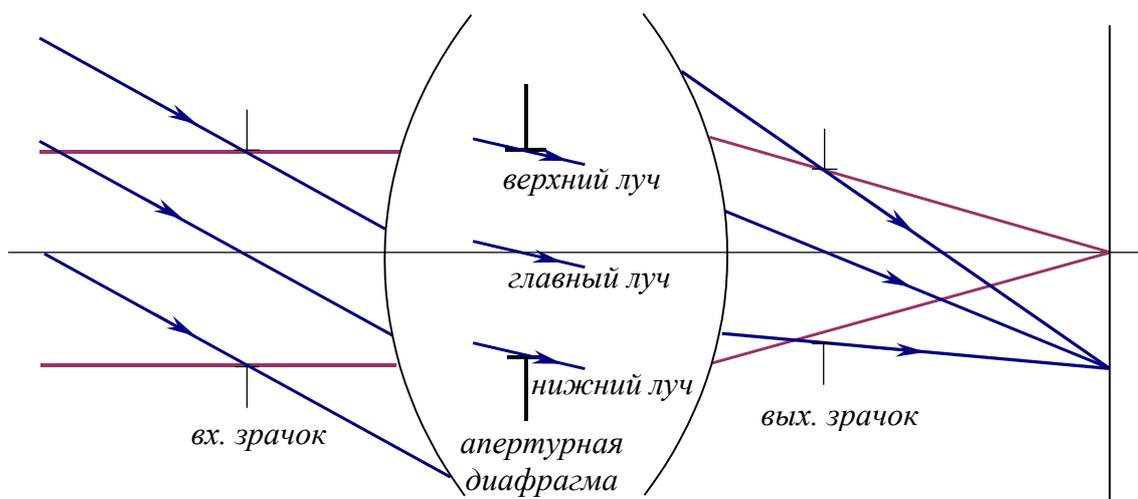


Рис.7.2.2. Внеосевой пучок.

**Верхний луч внеосевого пучка** – это луч, проходящий через верхний край апертурной диафрагмы и соответствующие ему сопряженные точки входного и выходного зрачков.

**Нижний луч внеосевого пучка** – это луч, проходящий через нижний край апертурной диафрагмы и соответствующие ему сопряженные точки входного и выходного зрачков.

Чтобы определить, какая из диафрагм оптической системы является апертурной, надо найти изображение всех диафрагм в пространстве предметов в обратном ходе по законам параксиальной оптики.

**Апертурная диафрагма** – это диафрагма, изображение которой видно под наименьшим углом из осевой точки предмета.

Если предмет находится на бесконечности, то апертурная диафрагма – это диафрагма, изображение которой имеет наименьшие линейные размеры.

### 7.2.2. Полевая диафрагма

**Поле** – это часть плоскости предметов, которая изображается оптической системой. В параксиальной оптике размер поля неограничен. В реальной оптической системе поле ограничивается полевой диафрагмой.

**Полевая диафрагма** – это диафрагма, ограничивающая размеры поля.

Полевая диафрагма располагается либо на поверхности предмета, либо на поверхности изображения, либо в плоскости промежуточного изображения. Изображения полевой диафрагмы через соответствующие части оптической системы называются **входными и выходными люками (окнами)** (рис.7.2.3).

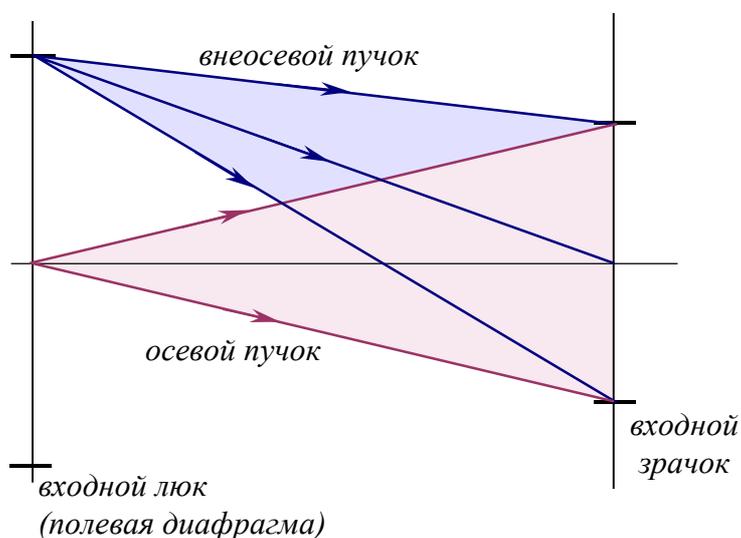


Рис.7.2.3. Полевая диафрагма.

### 7.2.3. Виньетирование

Если пучки лучей ограничиваются только апертурной диафрагмой, то они полностью заполняют зрачок, как показано на рис.7.2.3. Если внеосевые пучки дополнительно ограничиваются помимо апертурной другими диафрагмами, то зрачок заполняется не полностью (рис.7.2.4). Это дополнительное ограничение или срезание пучков называется **виньетированием**.

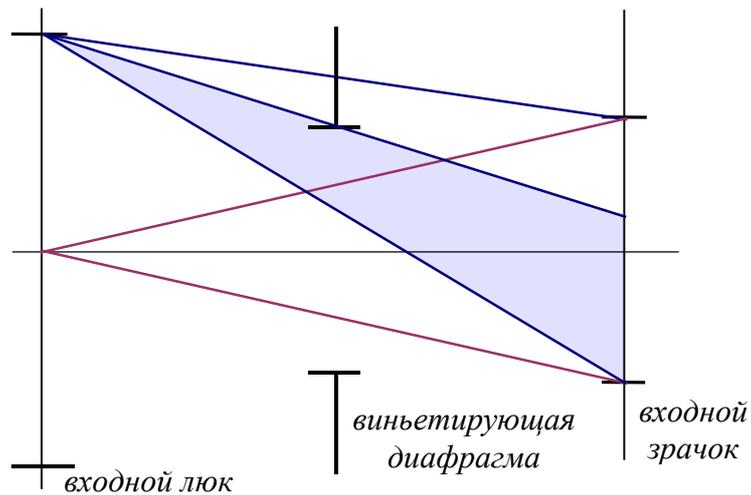


Рис.7.2.4. Виньетирование.

В общем случае область диафрагмы выглядит так, как показано на рис.7.2.5, из которого видно, что пучок срезается сверху на величину  $a_в$ , и снизу на величину  $a_н$ . Эти величины могут быть равны друг другу, тогда виньетирование симметрично. Если  $a_в \neq a_н$  – виньетирование несимметрично.

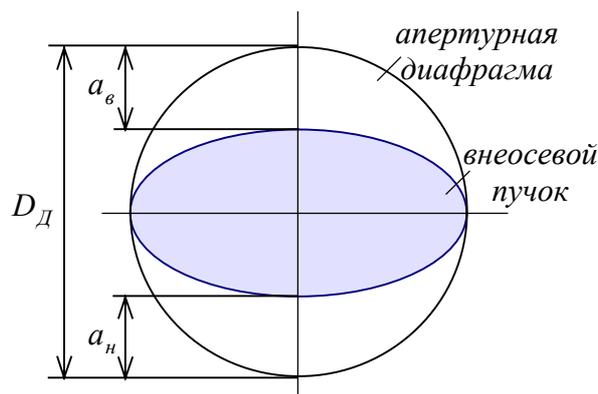


Рис. 7.2.5. Виньетирование (плоскость апертурной диафрагмы).

**Коэффициент виньетирования** – это отношение размеров срезаемой части диафрагмы к ее радиусу. Коэффициенты виньетирования сверху  $K_в$  и снизу  $K_н$  вычисляются следующим образом:

$$K_в = \frac{2a_в}{D_д} \tag{7.2.1}$$

$$K_н = \frac{2a_н}{D_д}$$

Внеосевой пучок лучей в случае виньетирования показан на рис.7.2.6.

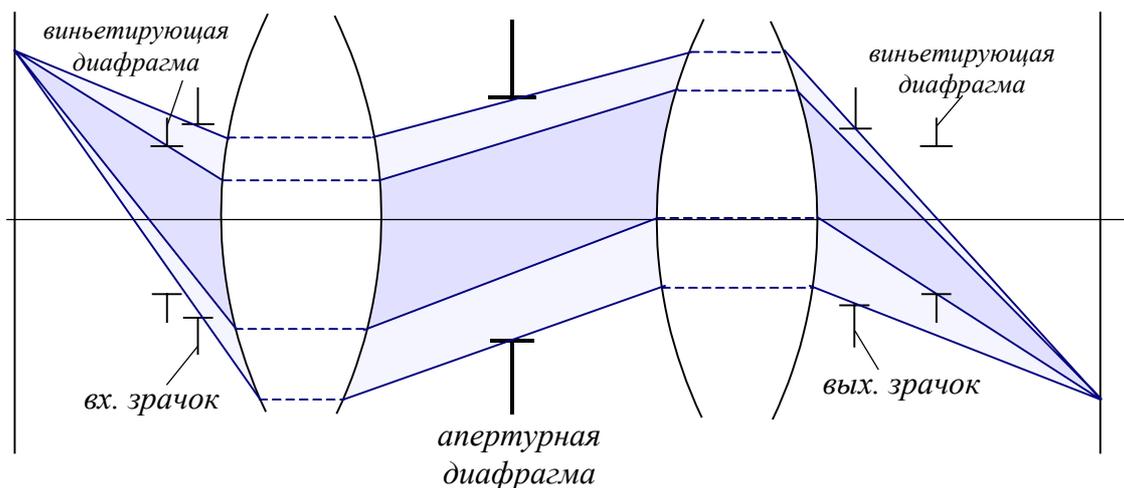


Рис.7.2.6. Виньетированный пучок лучей.

#### **Достоинства виньетирования:**

- способствует уменьшению поперечных габаритов оптической системы,
- исключает из формирования изображения крайние зоны внеосевых пучков (именно они обычно имеют большие и трудно устранимые aberrации).

#### **Недостатки виньетирования:**

- уменьшает размеры пучков, следовательно, уменьшает энергию пучка, что приводит к неравномерному распределению освещенности внеосевых зон изображения,
- в дифракционно-ограниченных оптических системах качество изображения определяется дифракцией, причем чем меньше результирующая апертура (размер пучка), тем больше влияние дифракции, то есть ухудшается качество изображения.

### **7.3. Описание предметов, изображений и зрачков**

Одним способом описывать размеры и положение предмета, изображения и зрачков во всех ситуациях не всегда удобно. Рассмотрим это описание для двух типов предмета и изображения – ближнего и дальнего.

### 7.3.1. Предмет (изображение) ближнего типа

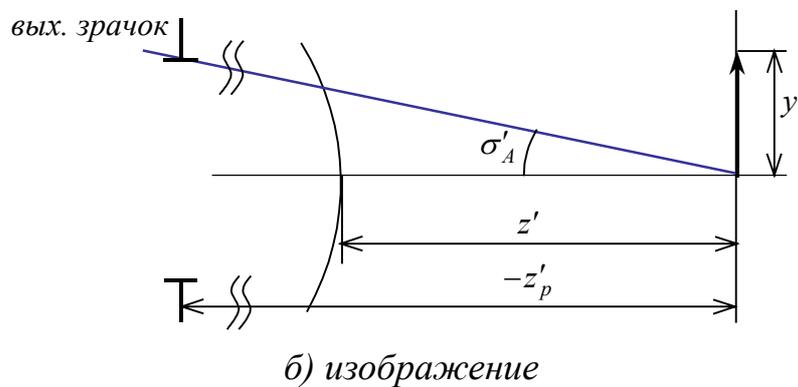
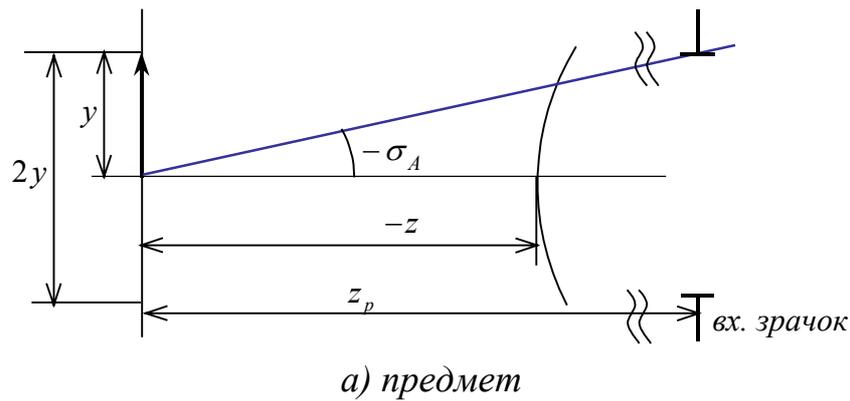


Рис.7.3.2. Предмет и изображение ближнего типа.

Величину предмета (изображения) принято рассматривать как расстояние от оси до его крайней точки. Если предмет (или изображение) находятся достаточно близко к оптической системе (рис.7.3.1), то его величина измеряется в линейной мере:

$$\begin{aligned} & y, [\text{мм}] \\ & y', [\text{мм}] \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

Величина предмета – это половина всего поля, то есть размер всего поля  $2y$ .

**Передний (задний) отрезок** – это величина, определяющая положение предмета (изображения) по отношению к оптической системе. Передний отрезок для ближнего типа измеряется как расстояние от первой поверхности оптической системы до предмета, а задний отрезок измеряется как расстояние от последней поверхности до изображения (рис.7.3.1):

$$\begin{aligned} & S = z, [\text{мм}] \\ & S' = z', [\text{мм}] \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

Входной (выходной) зрачок может находиться на бесконечности. Поэтому размер зрачка определяется апертурным углом. **Апертурный угол**  $\sigma_A$  – это угол, образованный апертурным лучом и осью (рис.7.3.1). Размеры зрачков определяют через синусы апертурных углов, умноженные на соответствующие показатели преломления – "оптические синусы". Эти размеры называется **числовыми апертурами**, и определяются следующим образом:

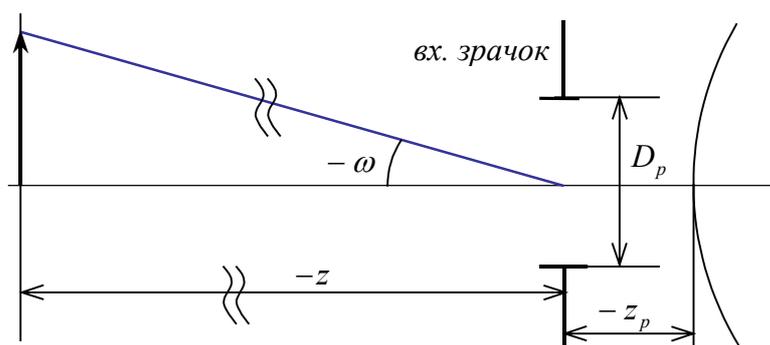
$$\begin{aligned} A_0 &= n \cdot \sin \sigma_A \\ A'_0 &= n' \cdot \sin \sigma'_A \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

**Положение зрачка** измеряется относительно предмета (изображения) в обратных миллиметрах:

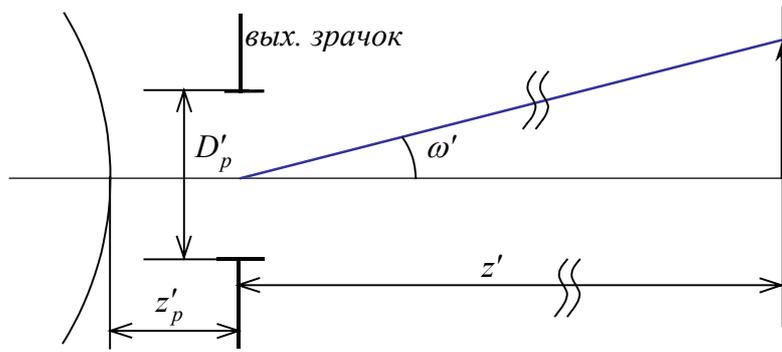
$$\begin{aligned} S_p &= \frac{1}{z_p}, \quad [\text{кднтр}] \\ S'_p &= \frac{1}{z'_p}, \quad [\text{кднтр}] \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Если входной и выходной зрачки расположены строго в бесконечности, то  $S_p = 0$  и  $S'_p = 0$ . Такие положения зрачков обеспечиваются тем, что апертурная диафрагма находится в передней (или задней) фокальной плоскости первого (или последнего) компонента оптической системы. В этом случае возникает **телецентрический ход** главных лучей (главные лучи параллельны оптической оси).

### 7.3.2. Предмет (изображение) дальнего типа



а) предмет



б) изображение

Рис.7.3.2. Предмет и изображение дальнего типа.

Если предмет (или изображение) находится достаточно далеко от оптической системы, то мы можем оценить только его угловые размеры. Точка, из которой измеряются угловые размеры предмета (изображения), называется **полюсом**. Будем считать, что полюс находится в центре входного зрачка для предмета, и в центре выходного зрачка для изображения (рис.7.3.2).

Величина предмета (изображения) дальнего типа – это угол, под которым видна крайняя точка предмета (изображения) из центра входного (выходного) зрачка:

$$\begin{aligned} \omega, [\text{гр.мн.сек.}] \\ \omega', [\text{гр.мн.сек.}] \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Величина всего поля  $2\omega$ . Мерой угловой величины являются градусы/минуты/секунды (гр.мн.сек.), например  $20^{\circ}10'18''$

**Положение предмета** (изображения) измеряется в обратных миллиметрах относительно входного (выходного) зрачка:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{z}, [\text{кднтр}] \\ S' = \frac{1}{z'}, [\text{кднтр}] \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

В случае предмета (изображения) дальнего типа зрачок находится близко к оптической системе, поэтому величина зрачка измеряется как его линейный размер. Таким образом, **апертуры** в этом случае определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_0 = n \cdot \frac{D_p}{2}, [\text{мм}] \\ A'_0 = n' \cdot \frac{D'_p}{2}, [\text{мм}] \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

**Положение зрчка** измеряется в миллиметрах от оптической системы:

$$\begin{aligned} S_p &= z_p, \text{ [мм]} \\ S'_p &= z'_p, \text{ [мм]} \end{aligned} \quad (7.3.8)$$

Для оптической системы очень важно знать положение выходного зрчка. Так как изображение обычно воспринимается или последующей оптической системой, или глазом, следовательно, необходимо, чтобы выходной зрчок оптической системы совпадал с входным зрчком прибора или глаза по положению и размерам.

### 7.3.3. Обобщенные характеристики

Для описания характеристик предмета или изображения в универсальной форме, не зависящей от их типа (дальнего или ближнего), вводятся обобщенные характеристики. Они имеют различный смысл и размерность, хотя обозначаются одинаково. В таблице показано соответствие реальных и обобщенных характеристик друг другу.

Обобщенные характеристики	Ближний тип	Дальний тип
Величина предмета (изображения)	$\bar{y} = y, \text{ [мм]}$ $\bar{y}' = y', \text{ [мм]}$	$\bar{y} = tg\omega, \text{ [гр.мн.сек.]}$ $\bar{y}' = tg\omega', \text{ [гр.мн.сек.]}$
Положение предмета (изображения)	$\bar{S} = S = z, \text{ [мм]}$ $\bar{S}' = S' = z', \text{ [мм]}$ (измеряется от поверхности)	$\bar{S} = S = \frac{1}{z}, \text{ [кдптп]}$ $\bar{S}' = S' = \frac{1}{z'}, \text{ [кдптп]}$ (измеряется от зрчка)
Входная (выходная) апертуры	$\bar{A}_0 = A_0 = n \cdot \sin \sigma_A, \text{ [гр.мн.сек.]}$ $\bar{A}'_0 = A'_0 = n' \cdot \sin' \sigma'_A, \text{ [гр.мн.сек.]}$ (числовая апертура)	$\bar{A}_0 = A_0 = n \frac{D_p}{2}, \text{ [мм]}$ $\bar{A}'_0 = A'_0 = n' \frac{D'_p}{2}, \text{ [мм]}$ (апертура)
Положение входного (выходного) зрчка	$\bar{S}_p = S_p = \frac{1}{z_p}, \text{ [кдптп]}$ $\bar{S}'_p = S'_p = \frac{1}{z'_p}, \text{ [кдптп]}$ (измеряется от предмета/изображения)	$\bar{S}_p = S_p = z_p, \text{ [мм]}$ $\bar{S}'_p = S'_p = z'_p, \text{ [мм]}$ (измеряется от поверхности)

#### 7.3.4. Обобщенное увеличение и инвариант Лагранжа-Гельмгольца

Используя понятие обобщенного предмета и изображения можно ввести понятие **обобщенного увеличения**:

$$\| V = \frac{\bar{y}'}{\bar{y}} = \frac{\bar{A}_0}{\bar{A}'_0} \quad (7.3.9)$$

где  $\bar{y}$  – обобщенная величина предмета,  $\bar{y}'$  – обобщенная величина изображения,  $\bar{A}_0$  – обобщенная передняя апертура,  $\bar{A}'_0$  – обобщенная задняя апертура.

Для любой оптической системы существует обобщенный инвариант Лагранжа-Гельмгольца, выраженный в реальных величинах (Параграф 5.3.6). Однако, в отличие от параксиальной оптики, его инвариантность не строгая, а приближенная. Инвариантность нарушается из-за наличия aberrаций и явления дифракции в оптической системе. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца через обобщенные характеристики можно записать следующим образом:

$$\| \bar{y} \cdot \bar{A}_0 = \bar{y}' \cdot \bar{A}'_0 \quad (7.3.10)$$

## 8. Аберрации оптических систем

### 8.1. Формы представления аберраций (поперечная, продольная, волновая)

#### 8.1.1. Общие положения

В идеальной оптической системе все лучи, исходящие из точки  $A$ , пересекаются в сопряженной с ней точке  $A'_0$ . После прохождения реальной оптической системы либо нарушается гомоцентричность пучка и лучи не имеют общей точки пересечения, либо гомоцентричность сохраняется, но лучи пересекаются в некоторой точке  $A'$ , которая не совпадает с точкой идеального изображения (рис.8.1.1). Это является следствием аберраций. Основная задача расчета оптических систем – устранение аберраций.

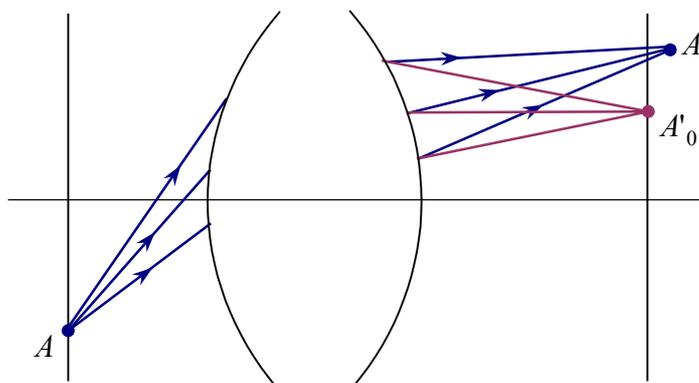


Рис.8.1.1. Идеальное и реальное изображения точки.

Для вычисления аберраций необходимо определить точку референтного (идеального) изображения  $A'_0$ , в которой должно находиться изображение по законам гауссовой оптики. Относительно этой точки и определяют аберрации.

#### 8.1.2. Поперечные аберрации

**Поперечные аберрации**  $(\Delta x', \Delta y')$  – это отклонения координат точки  $A'$  пересечения реального луча с плоскостью изображения от координат точки  $A'_0$  идеального изображения в направлении, перпендикулярном оптической оси (рис.8.1.2):

$$\begin{aligned} \Delta x' &= x'_0 - x' \\ \Delta y' &= y'_0 - y' \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Если точки  $A'$  и  $A'_0$  совпадают, то поперечные aberrации равны нулю ( $\Delta x' = 0, \Delta y' = 0$ ).

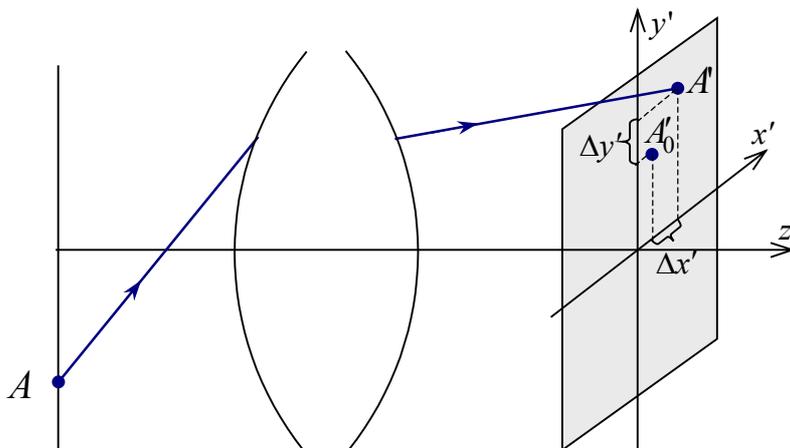


Рис.8.1.2. Поперечные aberrации.

Различают поперечные aberrации в сагиттальной плоскости ( $\Delta x'$ ) и в меридиональной плоскости ( $\Delta y'$ ). Поперечные aberrации для изображения ближнего типа выражаются в миллиметрах, для изображения дальнего типа – в угловой мере. Для изображения дальнего типа поперечная aberrация – это угловое отклонение  $\Delta \sigma'$  между реальным и идеальным лучом (рис.8.1.3).

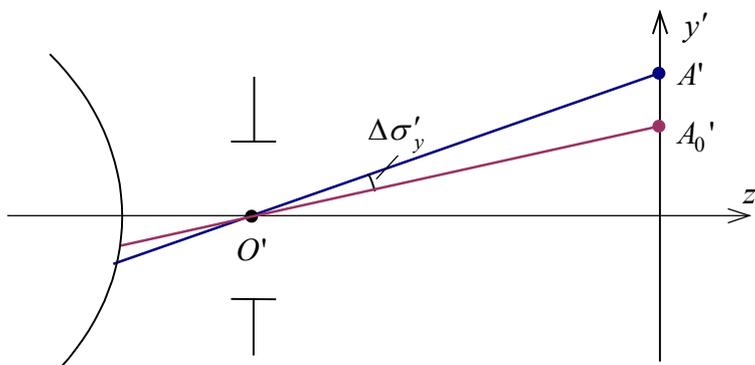


Рис.8.1.3. Поперечные aberrации для удаленного изображения.

У каждого луча в пучке своя величина поперечной aberrации. Для всего пучка поперечные aberrации – это функции от зрачковых координат:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x'(P_x, P_y) \\ \Delta y' &= \Delta y'(P_x, P_y) \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

где  $(P_x, P_y)$  – **реальные зрачковые координаты.**

### **Зрачковые канонические координаты.**

Зрачковые координаты определяют положение луча в пучке. Канонические (относительные) зрачковые координаты определяются следующим образом:

$$\rho_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{P'_x}{A'_x}, \quad \rho_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{P'_y}{A'_y} \quad (8.1.3)$$

где  $(P_x, P_y)$ ,  $(P'_x, P'_y)$  – входные и выходные реальные зрачковые координаты,  $(A_x, A_y)$ ,  $(A'_x, A'_y)$  – входные и выходные апертуры. Апертуры определяют максимальные значения зрачковых координат.

Таким образом, верхний луч пучка имеет координаты  $\rho_x = 0, \rho_y = 1$ , нижний луч пучка –  $\rho_x = 0, \rho_y = -1$ , главный луч пучка –  $\rho_x = \rho_y = 0$ , сагиттальный луч –  $\rho_x = 1, \rho_y = 0$  (рис.8.1.4).

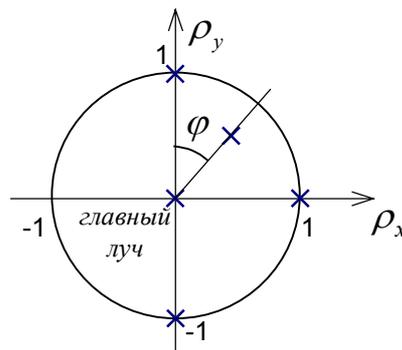


Рис.8.1.4. Канонические зрачковые координаты.

Канонические зрачковые координаты можно выразить через **полярные координаты**  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \rho_x &= \rho \sin \varphi \\ \rho_y &= \rho \cos \varphi \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

где  $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}$ .

### 8.1.3. Волновая абберация

**Волновая абберация** – это отклонение реального волнового фронта от идеального (рис.8.1.5), измеренное вдоль луча в количестве длин волн:

$$W = \frac{\Delta l' \cdot n'}{\lambda} \quad (8.1.5)$$

Из выражения (8.1.5) следует, что волновая абберация пропорциональна отклонениям оптических длин лучей пучка. Поэтому влияние волновой абберации на качество изображения не зависит от типа изображения, а определяется тем, сколько длин волн она составляет.

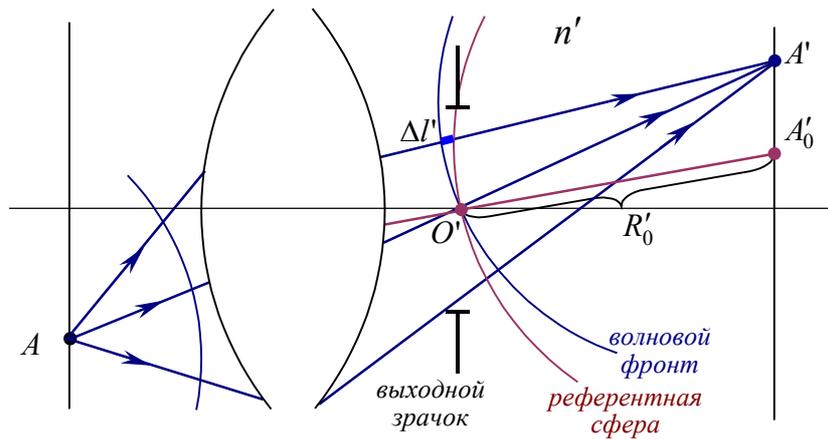


Рис.8.1.5. Волновая aberrация.

**Референтная сфера** – это волновой фронт идеального пучка с центром в точке идеального изображения  $A'_0$ , проходящий через центр выходного зрачка  $O'$ . При нахождении волновой aberrации с референтной сферой сравнивается ближайший к ней волновой фронт.

Для всего пучка волновая aberrация – это функция канонических зрачковых координат:

$$W = W(\rho_x, \rho_y) \quad (8.1.6)$$

Поперечная и волновая aberrации – это разные формы представления одного явления, они связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= -\frac{\lambda}{A_x} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_x} \\ \Delta y' &= -\frac{\lambda}{A_y} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_y} \end{aligned} \quad (8.1.7)$$

Таким образом, поперечные aberrации прямо пропорциональны первым частным производным волновой aberrации по каноническим координатам.

#### 8.1.4. Продольные aberrации

**Продольные aberrации** – это отклонения координаты точки  $O''$  пересечения реального луча с осью от координаты точки  $O'$  идеального изображения вдоль оси (рис.8.1.6):

$$\Delta S' = S' - S'_0 \quad (8.1.8)$$

где  $S'$  – положение точки пересечения луча с осью,  $S'_0$  – положение идеальной точки пересечения.

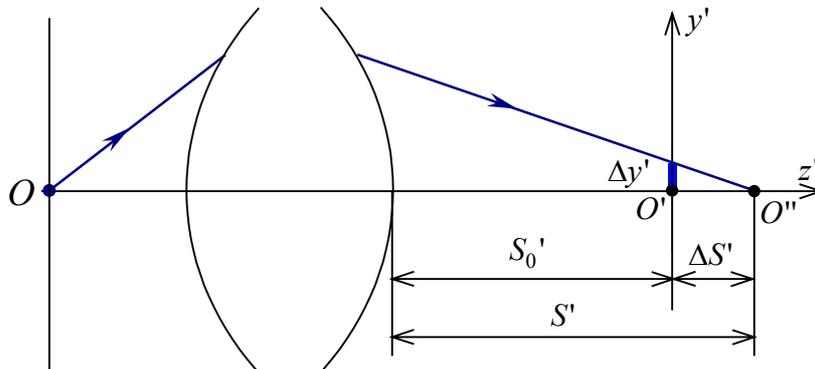


Рис.8.1.6. Продольные aberrации осевого пучка для изображения ближнего типа.

Для изображения ближнего типа продольные aberrации выражаются в миллиметрах, для изображения дальнего типа (рис.8.1.7) продольные aberrации выражаются в обратных миллиметрах:

$$\Delta S' = \frac{1}{z'_0} - \frac{1}{z'}, \text{ [кднтр]} \quad (8.1.9)$$

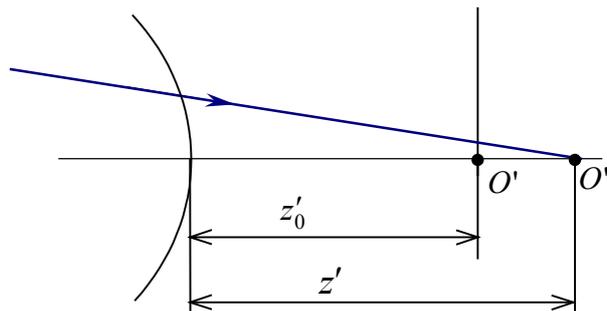


Рис.8.1.7. Продольные aberrации осевого пучка для изображения дальнего типа.

Продольные aberrации связаны с поперечными, и, следовательно, с волновыми тоже:

$$\Delta S' \approx \frac{\lambda}{A_0'^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} \quad (8.1.10)$$

где  $A_0'$  – задняя апертура осевого пучка.

Выражение (8.1.10) приближенное, оно может использоваться только для случая небольших апертур.

Итак, из выражений (8.1.7) и (8.1.10) следует, что волновая, поперечная и продольная aberrация – это разные формы представления одного явления нарушения гомоцентричности пучков. При оценке качества изображения за исходную модель aberrационных свойств оптической системы берут волновую aberrацию (по величине волновой aberrации судят о качестве оптической

системы). Однако, если aberrации велики, то более целесообразно использовать для оценки качества изображения поперечные aberrации.

## 8.2. Монохроматические aberrации

Aberrации делятся на **монохроматические** и **хроматические**. Монохроматические aberrации присутствуют, даже если оптическая система работает при монохроматическом излучении.

Монохроматические aberrации делятся на несколько типов:

- сферическая,
- кома,
- астигматизм и кривизна изображения,
- дисторсия.

Обычно все последующие aberrации добавляются к уже существующим. Но мы будем рассматривать каждый тип aberrации по отдельности, как если бы только он и существовал.

### 8.2.1. Разложение волновой aberrации в ряд

Если в оптической системе присутствуют все типы aberrаций, то для описания отдельных типов aberrаций волновую aberrацию можно разложить в ряд по степеням относительных зрачковых координат в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W(\rho_x, \rho_y) = & W_{00} + W_{20}(\rho_x^2 + \rho_y^2) + W_{40}(\rho_x^2 + \rho_y^2)^2 + W_{60}(\rho_x^2 + \rho_y^2)^3 + \dots \\
 & + W_{11}\rho_x + W_{31}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_x + W_{51}(\rho_x^2 + \rho_y^2)^2\rho_x + \dots \\
 & + W_{22}\rho_y^2 + W_{42}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_y^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

или в полярных координатах:

$$\begin{aligned}
 W(\rho, \varphi) = & W_{00} + W_{20}\rho^2 + W_{40}\rho^4 + W_{60}\rho^6 + \dots \\
 & + W_{11}\rho \cos \varphi + W_{31}\rho^3 \cos \varphi + W_{51}\rho^5 \cos \varphi + \dots \\
 & + W_{22}\rho^2 \cos^2 \varphi + W_{42}\rho^4 \cos^4 \varphi + \dots
 \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

где  $W_{nm}$  ( $n$  – степень  $\rho$ ,  $m$  – степень  $\cos \varphi$ ) – коэффициент, значение которого определяет вклад конкретного типа (и порядка) aberrации в общую волновую aberrацию:

$W_{00}$  – постоянная составляющая, которая может быть сведена к нулю соответствующим выбором референтной сферы,

$W_{20}\rho^2$  – продольная дефокусировка,

$W_{40}\rho^4$  и  $W_{60}\rho^6$  – сферическая aberrация 3 и 5 порядка,

$W_{11}\rho \cos \varphi$  – дисторсия,

$W_{31}\rho^3 \cos \varphi + W_{51}\rho^5 \cos \varphi$  – кома 3 и 5 порядка,

$W_{22}\rho^2 \cos^2 \varphi + W_{42}\rho^4 \cos^4 \varphi$  – астигматизм 3 и 5 порядка.

В разложении могут участвовать и более высокие порядки, но мы их рассматривать не будем. Порядок aberrации определяется по степени координаты  $\rho$  в разложении поперечной aberrации в ряд. Этот ряд получаем путем дифференцирования выражения (8.2.2). Таким образом, поперечная aberrация определяется следующим образом:

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{A'} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{A'} [4W_{40}\rho^3 + 6W_{60}\rho^5 + \dots] \quad (8.2.3)$$

Разложение в ряд продольной aberrации имеет вид:

$$\Delta s' = \frac{\lambda}{A'^2} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} = \frac{\lambda}{A'^2} [4W_{40}\rho^2 + \dots] \quad (8.2.4)$$

### 8.2.2. Радиально симметричные aberrации (дефокусировка и сферическая aberrация)

Радиально симметричные aberrации (расфокусировка и сферическая aberrация) анализируются и изучаются при рассмотрении осевой точки предмета. Для описания радиально симметричных aberrаций достаточно использовать одну радиальную зрачковую координату  $\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}$ :

$$W(\rho_x, \rho_y) = W(\rho) = W_{00} + W_{20}\rho^2 + W_{40}\rho^4 + W_{60}\rho^6 + \dots \quad (8.2.5)$$

#### Дефокусировка

$$\| W(\rho) = W_{20}\rho^2 \quad (8.2.6)$$

Дефокусировка не приводит к нарушению гомоцентричности пучка (рис.8.2.1), а только свидетельствует о продольном смещении плоскости изображения.

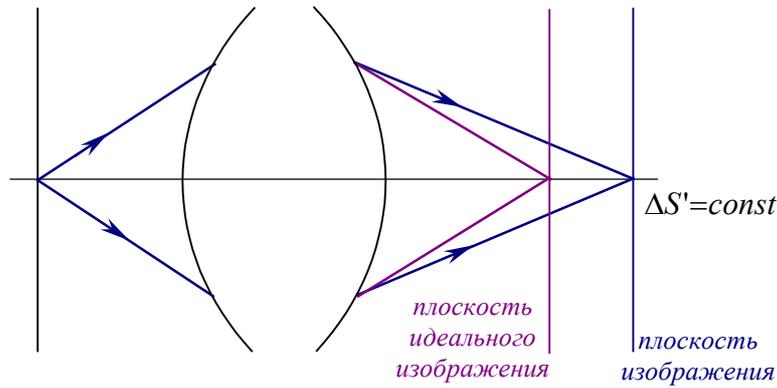


Рис.8.2.1. Дефокусировка.

При дефокусировке все лучи на выходе оптической системы пересекаются в одной точке, но не в точке идеального изображения. Поэтому в случае дефокусировки продольная aberrация постоянна для всех лучей (для всех точек зрачка):

$$\Delta S' = \frac{2\lambda W_{20}}{A'^2} = const \quad (8.2.7)$$

Если дефокусировки нет, то плоскость изображения совпадает с **плоскостью Гаусса** (плоскостью идеального изображения). Чтобы избавиться от дефокусировки, нужно просто соответствующим образом передвинуть плоскость изображения.

При анализе aberrаций оптических систем принято строить графики зависимости поперечной, продольной, и волновой aberrаций от зрачковых координат. Если в оптической системе присутствует только дефокусировка, то эти графики будут выглядеть как показано на рис.8.2.2.



Рис.8.2.2. Графики aberrаций для расфокусировки.

### Сферическая aberrация 3 порядка

$$W = W_{40}\rho^4 \quad (8.2.8)$$

Сферическая aberrация приводит к тому, что лучи, выходящие из осевой точки предмета, не пересекаются в одной точке, образуя на плоскости идеального изображения кружок рассеяния (рис.8.2.3). Ею обладают все линзы со сферическими поверхностями. Чтобы ее устранить, необходимо сделать поверхности не сферическими. Сферическую aberrацию 3 порядка называют также первичной сферической aberrацией.

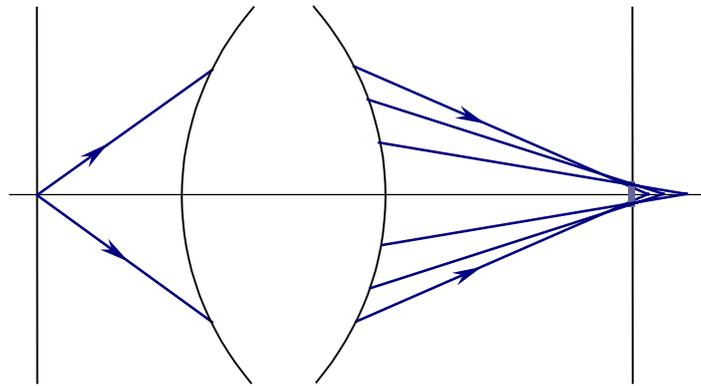


Рис.8.2.3. Сферическая aberrация.

Продольная и поперечная aberrации в этом случае определяются выражениями:

$$\Delta S' = \frac{\lambda}{A'^2} \cdot 4W_{40}\rho^2 \quad (8.2.9)$$

$$\Delta y' = \frac{\lambda}{A'} \cdot 4W_{40}\rho^3 \quad (8.2.10)$$

В простых положительных линзах сферическая aberrация 3 порядка отрицательна, а в отрицательных положительна. Графики волновой, продольной и поперечной aberrаций в случае сферической aberrации 3 порядка представлены на рис.8.2.4.

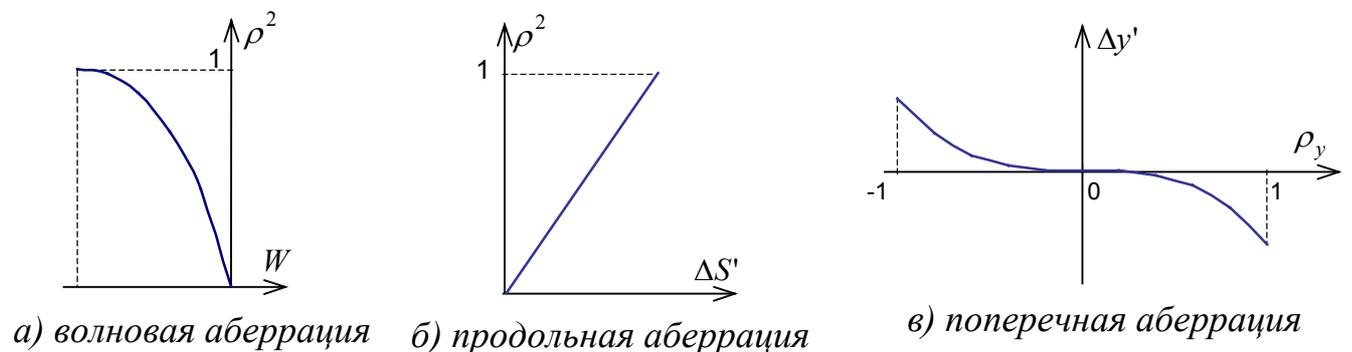


Рис.8.2.4. Графики aberrаций для сферической aberrации 3 порядка.

## Сферическая aberrация 5 порядка

$$W = W_{60} \rho^6 \quad (8.2.11)$$

По характеру искажения гомоцентричности пучка лучей сферическая aberrация 5 порядка полностью аналогична сферической aberrации 3 порядка, только имеет более высокий порядок кривых на графиках поперечной и продольной aberrаций.

В сложных системах сферические aberrации 3 и 5 порядков имеют разные знаки и могут взаимно компенсировать друг друга. На рис.8.2.5 представлен график оптимальной коррекции сферической aberrации 3 и 5 порядков для апертурного луча ( $\rho = 1$ ). В результате коррекции остаточные aberrации становятся меньше, чем сами aberrации 3 и 5 порядка.

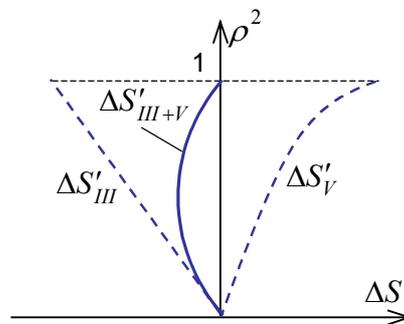


Рис.8.2.5. Взаимокompенсация сферической aberrации 3 и 5 порядков.

Однако в случае сферической aberrации 3 и 5 порядков может быть и так, как показано на рис.8.2.6.: а) – aberrация «недоисправлена», б) – aberrация «переисправлена».



а) недоисправленная сферическая aberrация

б) переисправленная сферическая aberrация

Рис.8.2.6. Графики коррекции сферической aberrации.

Поскольку продольной дефокусировкой легко управлять путем перемещения плоскости изображения, то сочетая сферическую aberrацию и дефокусировку, можно выбрать наилучшее с точки зрения минимума

сферической aberrации положение изображения. В частности, для сферической aberrации 3 порядка при помощи выражений (8.2.9), (8.2.10) можно вычислить положение изображения, в котором кружок рассеяния минимален. При этом продольное смещение изображения составляет 3/4 от продольной aberrации апертурного луча.

### 8.2.3. Кома

*От греческого: кома – хвост, пучок волос.*

Кома появляется при смещениях точки предмета с оси. Кома добавляется к другим aberrациям (например, к сферической), но мы будем рассматривать ее отдельно от других aberrаций (рис.8.2.7).

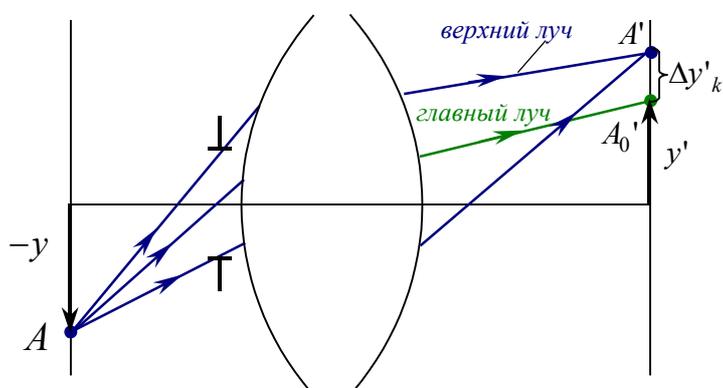


Рис.8.2.7. Структура пучка лучей при наличии комы.

В первом приближении кома прямо пропорциональна смещению предмета с оси. Если смещение равно нулю, то и кома равна нулю. Таким образом, поперечная aberrация при наличии комы прямо пропорциональна величине предмета:

$$\Delta y'_k \sim \delta \cdot y \quad (8.2.12)$$

где  $\delta$  – коэффициент пропорциональности, определяющий качество aberrационной коррекции оптической системы (чем меньше  $\delta$ , тем лучше оптическая система).

Разложение в ряд волновой aberrации (параграф 8.2.1) при наличии комы 3 и 5 порядков:

$$\parallel W(\rho, \varphi) = W_{31} \rho^3 \cos \varphi + W_{51} \rho^5 \cos \varphi \quad (8.2.13)$$

или

$$\parallel W(\rho_x, \rho_y) = W_{31} (\rho_x^2 + \rho_y^2) \rho_y = W_{31} (\rho_x^2 \rho_y + \rho_y^3)$$

Выражение для поперечных aberrаций (после дифференцирования выражения (8.2.13)) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \frac{\lambda}{A'} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_x} = \frac{\lambda}{A'} \cdot W_{31} (2\rho_x \rho_y) \\ \Delta y' &= \frac{\lambda}{A'} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho_y} = \frac{\lambda}{A'} \cdot W_{31} (\rho_x^2 + 3\rho_y^2)\end{aligned}\tag{8.2.14}$$

Описание поперечных aberrаций комы различно для меридионального и сагиттального сечений. В меридиональном сечении  $\rho_x = 0$ , следовательно:

$$\begin{cases} \Delta x' = 0 \\ \Delta y' = \frac{\lambda}{A'} \cdot W_{31} \cdot 3\rho_y^2 \end{cases}\tag{8.2.15}$$

В сагиттальном сечении  $\rho_y = 0$ , следовательно:

$$\begin{cases} \Delta x' = 0 \\ \Delta y' = \frac{\lambda}{A'} \cdot W_{31} \cdot \rho_x^2 \end{cases}\tag{8.2.16}$$

На рис.8.2.8 показаны графики поперечных aberrаций для комы 3 порядка в меридиональном и сагиттальном сечениях. Кривые на графиках имеют одинаковую форму, но в меридиональном сечении значение  $\Delta y'$  в 3 раза больше, чем в сагиттальном.

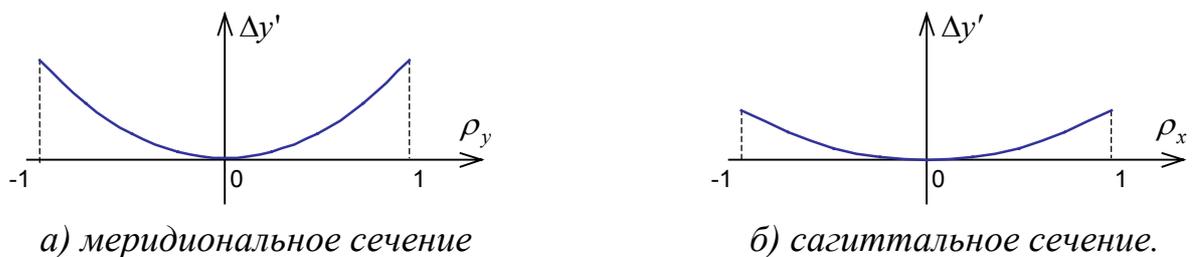


Рис.8.2.9. Поперечные aberrации при коме 3 порядка.

Для того чтобы лучше понять структуру поперечных aberrаций при коме, рассмотрим **точечную диаграмму** лучей. Разобьем зрачок на множество равновеликих площадок и рассмотрим лучи, проходящие через центры этих площадок (рис.8.2.10.а). Получим картину лучей, равномерно распределенных по зрачку. Точки пересечения этих лучей с плоскостью изображения образуют точечную диаграмму (рис.8.2.10.б).

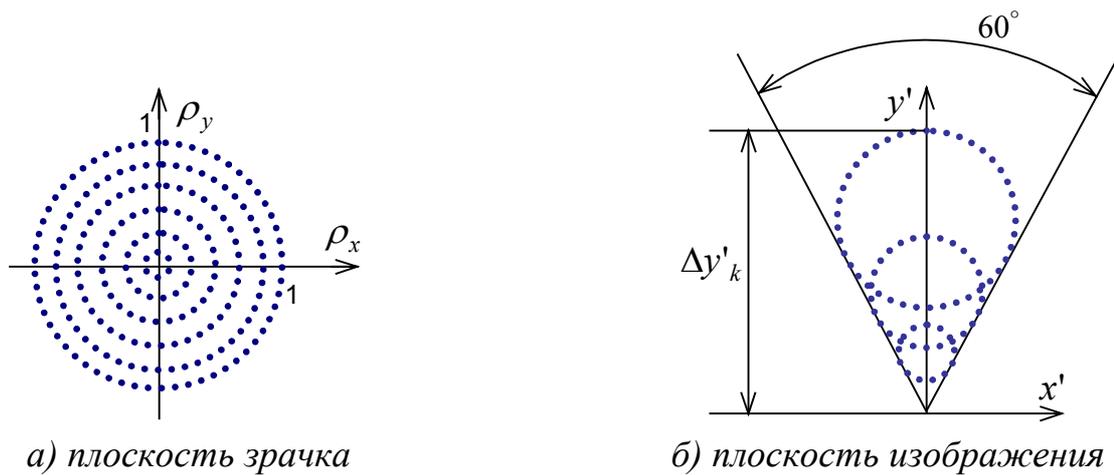


Рис.8.2.10. Точечная диаграмма.

### Кома и неизопланатизм

В названии “неизопланатизм” присутствуют корни греческих слов: изос – одинаковый, равный, планета – блуждающее тело.

**Изопланатизм** (одинаково заблуждающийся) – в окрестности оси оптической системы нет комы, но есть сферическая aberrация (изображение разных точек предмета будет одинаково плохое). **Апланатизм** – нет ни комы, ни сферической aberrации (изображение разных точек предмета идеальное). Апланатизм может выполняться только для какой-то части предмета, например в окрестности оси.

О возможной величине комы можно судить, не смещая точку с оси, если количественно оценить **неизопланатизм**. Такая оценка возможна, если использовать условия апланатизма и неизопланатизма.

**Закон синусов Аббе (условие апланатизма):**

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'} = \text{const} = V \quad (8.2.17)$$

Если это условие выполняется для всех лучей, то нет ни комы, ни сферической aberrации. Если присутствует сферическая aberrация, то вместо условия апланатизма используется похожее условие – **условие неизопланатизма**:

$$\frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'_0} = \text{const} = V \quad (8.2.18)$$

Рис.8.2.11 показывает разницу в определении двух условий – условия синусов Аббе и условия неизопланатизма.

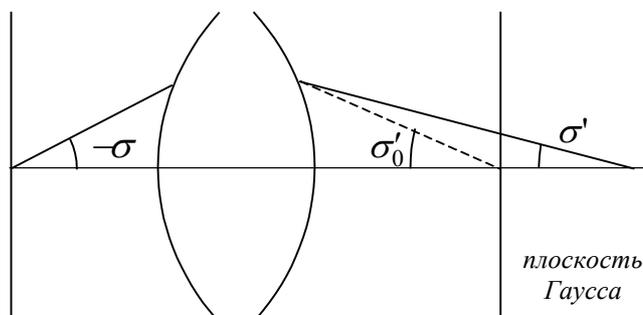


Рис.8.2.11. Углы лучей, используемые в условиях апланатизма и изопланатизма.

Если условие изопланатизма выполняется, то комы в ближайшей окрестности осевой точки не будет. Относительное отступление от изопланатизма (так называемая мера комы) определяется следующим выражением:

$$\eta(\%) = \left( \frac{\sin \sigma}{\sin \sigma'_0 \cdot V} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (8.2.19)$$

Поперечная aberrация комы 3 порядка для точки изображения с координатой  $y'$  может быть представлена следующим образом:

$$\Delta y' = \frac{3\eta \cdot y'}{100\%} \quad (8.2.20)$$

#### 8.2.4. Астигматизм и кривизна изображения

Астигматизм появляется при значительном смещении точки предмета с оси и добавляется ко всем остальным aberrациям. Сместим предмет с оси на значительное расстояние (рис.8.2.12). **Астигматизм** состоит в том, что не совпадают точки фокусов в меридиональной  $F'_m$  и сагиттальной  $F'_s$  плоскостях, поэтому лучи бесконечно узкого пучка не сходятся в одной точке. **Кривизна** заключается в том, что наилучшее изображение получается на искривленной поверхности, а не на плоскости.

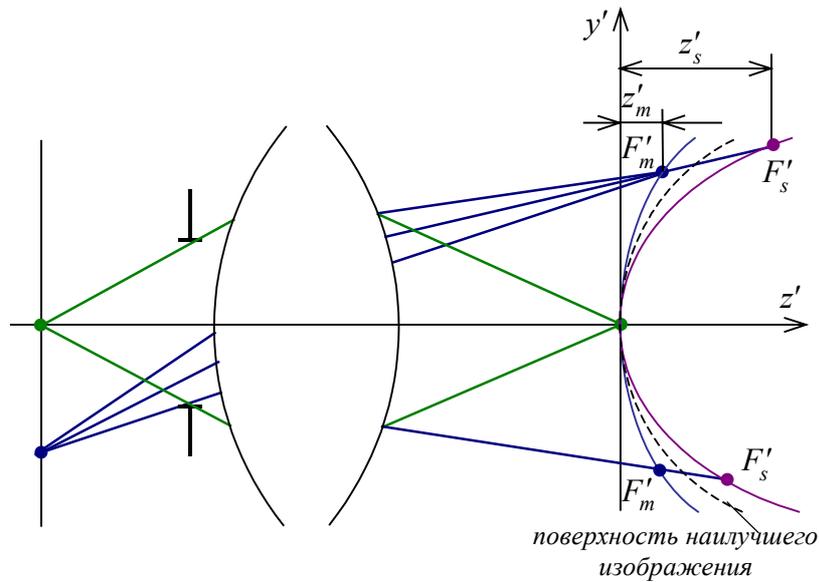


Рис.8.2.12. Астигматизм и кривизна изображения.

Разложение в ряд волновой aberrации (параграф 8.2.1) при наличии астигматизма 3 и 5 порядков:

$$\| W(\rho, \varphi) = W_{22}\rho^2 \cos^2 \varphi + W_{42}\rho^4 \cos^4 \varphi \quad (8.2.21)$$

или

$$\| W(\rho_x, \rho_y) = W_{22}\rho_y^2 + W_{42}(\rho_x^2 + \rho_y^2)\rho_y^2$$

Количественно астигматизм и кривизна характеризуются **продольными астигматическими отрезками**  $z'_m$  и  $z'_s$ . Меридиональная кривизна определяется отрезком  $z'_m$  – это расстояние от плоскости параксиального изображения до меридионального фокуса  $F'_m$ . Сагиттальная кривизна определяется отрезком  $z'_s$  – это расстояние от плоскости параксиального изображения до сагиттального фокуса  $F'_s$ .

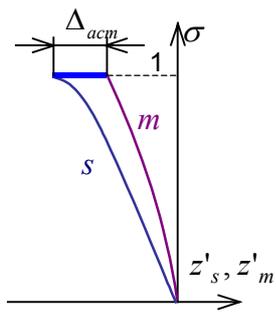
**Средняя кривизна** определяется полусуммой астигматических отрезков и указывает положение наилучшего изображения для данного пучка:

$$\Delta_{кр} = \frac{z'_m + z'_s}{2} \quad (8.2.22)$$

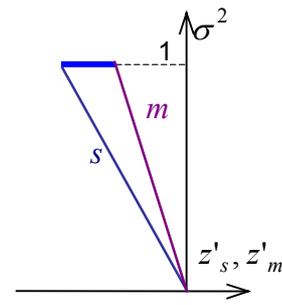
**Мера астигматизма** в продольном измерении определяется разностью астигматических отрезков:

$$\Delta_{аст} = z'_m - z'_s \quad (8.2.23)$$

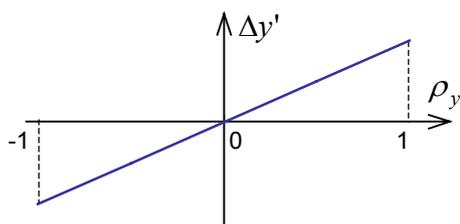
В первом приближении средняя кривизна пропорциональна квадрату расстояния от оси. Зависимость кривизны и астигматизма по полю показывают графики продольных aberrаций для внеосевых пучков (рис.8.2.13).



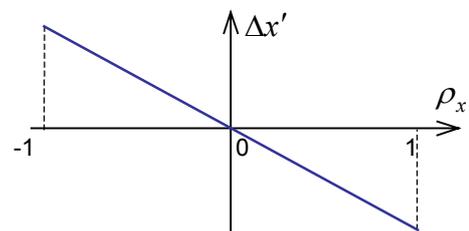
а) продольные aberrации  
(зависимость от предметной  
координаты)



б) продольные aberrации  
(зависимость от квадрата предметной  
координаты)



в) поперечные aberrации в  
меридиональном сечении



г) поперечные aberrации в  
сагиттальном сечении

Рис.8.2.13. Астигматизм 3 порядка (продольные и поперечные aberrации).

Здесь  $\sigma$  – **относительная предметная координата** (на краю поля  $\sigma = 1$ , на оси  $\sigma = 0$ ):

$$\sigma = \frac{y}{y_{\max}} \quad (8.2.24)$$

Для астигматизма более высоких порядков (5 и выше) графики могут выглядеть, как показано на рис.8.2.14:

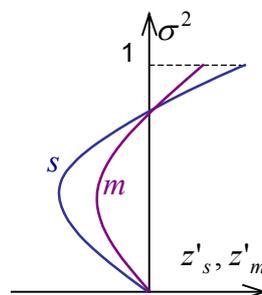


Рис.8.2.14. Продольные aberrации при астигматизме 5 порядка.

В зависимости от положения плоскости изображения при астигматизме пятно рассеяния может принимать форму эллипсов, отрезков или круга (рис.8.2.15). Горизонтальный отрезок наблюдается, если плоскость

изображения совпадает с меридиональным фокусом, а вертикальный – если с сагиттальным. Посередине между ними пятно рассеяния имеет форму круга. В остальных положениях – пятна эллиптической формы.

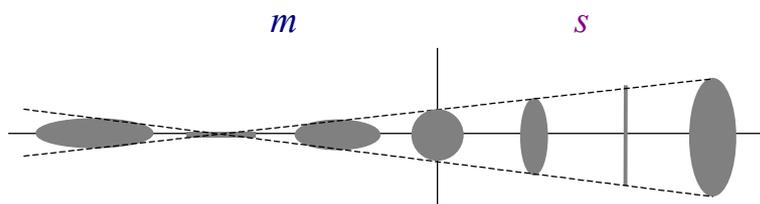


Рис.8.2.15. Пятна рассеяния астигматического пучка.

### 8.2.5. Дисторсия

Название происходит от латинского “искажение”.

Если кроме дисторсии других aberrаций нет, то точка изображается в виде точки (гомоцентрический пучок остается гомоцентрическим), но эта точка смещена от идеальной (рис.8.2.16).

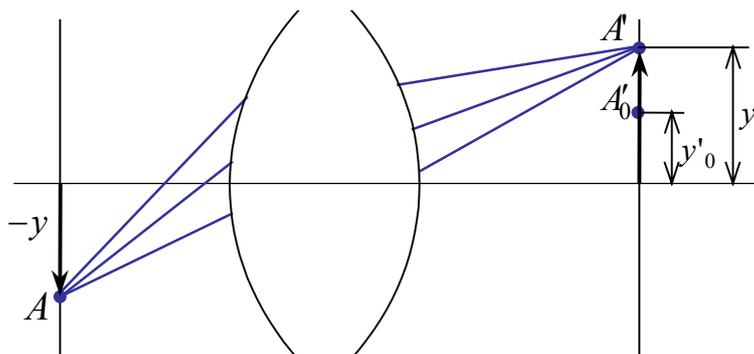


Рис.8.2.16. Дисторсия.

Разложение в ряд волновой aberrации (параграф 8.2.1) при наличии дисторсии:

$$\| W(\rho, \varphi) = W_{11} \rho \cos \varphi \quad (8.2.25)$$

или

$$\| W(\rho_x, \rho_y) = W_{11} \rho_y$$

При дисторсии величина изображения отличается от идеального:

$$\Delta y' = y' - y'_0 \quad (8.2.26)$$

**Абсолютная дисторсия** (выражается в тех же единицах, что и величина изображения):

$$\| \Delta y' = y' - V \cdot y \quad (8.2.27)$$

где  $V$  – увеличение системы для данной точки поля.

**Относительная дисторсия:**

$$\Delta\% = \frac{\Delta y'}{y'_0} \cdot 100\% = \left( \frac{y'}{V \cdot y} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (8.2.28)$$

Дисторсия характерна тем, что ее величина нелинейно зависит от величины предмета, то есть линейное увеличение различно для разных точек поля. Абсолютная дисторсия 3 порядка определяется дифференцированием выражения (8.2.25) и умножением на квадрат предметной координаты  $\sigma$ :

$$\Delta y' = -\frac{\lambda}{A'_y} \cdot \frac{\partial(W_{11}\rho \cos \varphi)}{\partial \rho_y} \cdot \sigma^2 = -\frac{\lambda}{A'_y} W_{11} \sigma^2 \quad (8.2.29)$$

График относительной дисторсии 3 порядка приведен на рис.8.2.17. Для сравнения показан примерный ход кривой дисторсии высшего порядка.

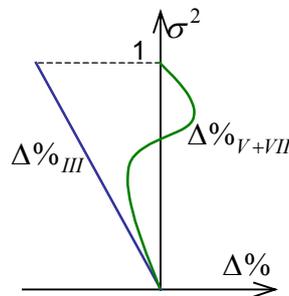


Рис.8.2.17. Дисторсия 3 и высшего порядков.

Наличие дисторсии приводит к искажению прямых линий, не проходящих через ось (рис.8.2.18). Если квадратный предмет изображается в виде подушки — это положительная дисторсия. Если изображение квадрата имеет выпуклые стороны (в виде бочки), то это отрицательная дисторсия.

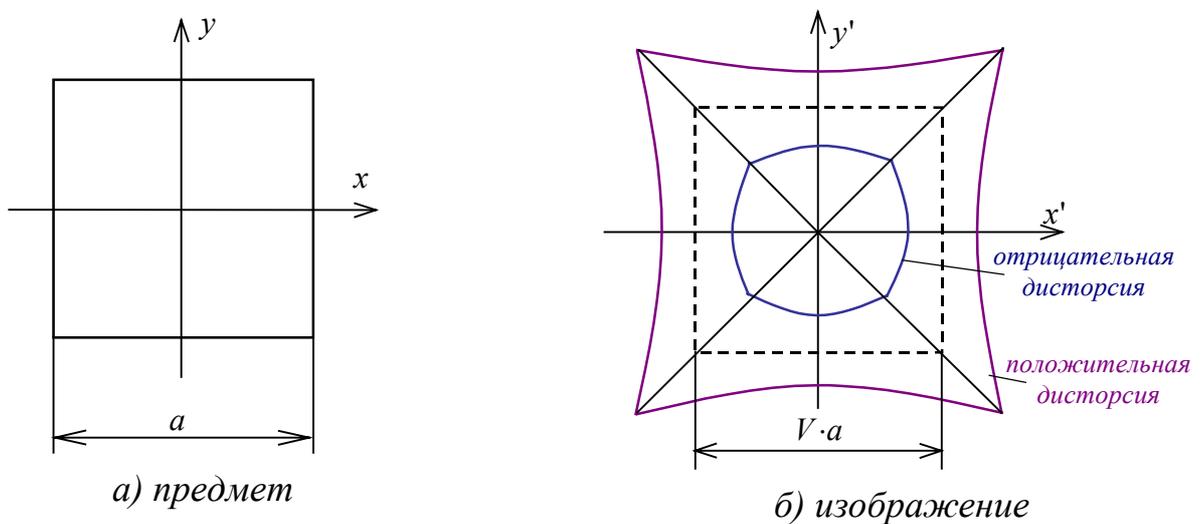


Рис.8.2.18. Дисторсия.

Допустимая относительная дисторсия (то есть дисторсия, которая при восприятии глазом не вызывает ощущения, что изображение искажено) около  $\Delta\% \approx 5-10\%$ . Исправление дисторсии важно в измерительных приборах (в частности, в фотограмметрических системах), так как наличие дисторсии приводит к нелинейной ошибке измерений. Например, в фотолитографии допуск на абсолютную дисторсию не превышает 20 нм.

### 8.3. Хроматические aberrации

**Хроматические aberrации** – это проявление зависимости характеристик оптической системы от длины волны света (*хромато* – цвет). Хроматические aberrации приводят к тому, что в изображениях неокрашенных предметов появляется окрашенность. Хроматические aberrации появляются из-за того, что оптические системы изготовлены из оптических стекол с показателями преломления, зависящими от длины волны  $n = n(\lambda)$ .

Существуют два основных вида хроматизма:

- хроматизм положения,
- хроматизм увеличения.

#### 8.3.1. Хроматизм положения

**Хроматизм положения** – это aberrация, при которой изображения одной точки предмета расположены на разном расстоянии от оптической системы для разных длин волн (разные положения плоскости изображения). В этом случае фокусы также расположены на разных расстояниях (рис.8.3.1).

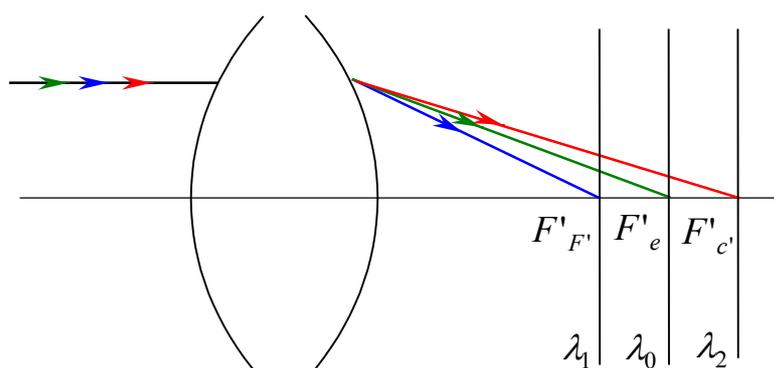


Рис.8.3.1. Хроматизм положения.

На рис.8.3.2 представлен типичный график зависимости положения изображения от длины волны.

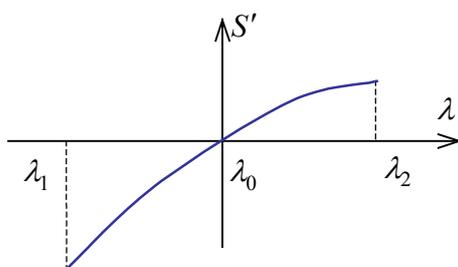


Рис.8.3.2. График зависимости положения изображения от длины волны.

Чем меньше длина волны, тем ближе изображение к оптической системе. Численно хроматизм положения определяется разностью положений плоскости изображения для крайних длин волн ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ):

$$\Delta S'_{\lambda_1-\lambda_2} = S'_{\lambda_1} - S'_{\lambda_2} \quad (8.3.1)$$

Естественный хроматизм возникает в оптической системе, если все линзы сделаны из одного сорта стекла. В таком случае оптическая система **неахроматизована**.

Устранение (коррекция) хроматизма может быть произведена двумя способами:

- использование зеркальных систем, где хроматизм в принципе отсутствует (катоптрические системы, например система Кассегрена),
- использование в линзовых (диоптрических) системах нескольких сортов стекла с различными коэффициентами дисперсии  $\nu_e$ .

### Принципы ахроматизации оптических систем

Возьмем две тонких линзы из разных сортов стекла. Если линзы расположены вплотную друг к другу, то получается тонкая система. Задача ахроматизации сводится к тому, чтобы оптическая сила системы линз не зависела от длины волны. Оптическая сила системы из двух тонких линз:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (8.3.2)$$

Оптическая сила каждой линзы  $\Phi = (n - 1) \cdot (\rho_1 - \rho_2)$ . Пусть  $\lambda_1 - \lambda_2 = -\Delta\lambda$ , при этом оптическая сила каждой линзы меняется на величину  $\Delta\Phi = (n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}) \cdot (\rho_1 - \rho_2)$ . Зная число Аббе для любого интервала длин волн

$\nu = \frac{n_{\lambda_0} - 1}{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}$ , можно получить следующее выражение:

$$\Delta\Phi = (n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}) \cdot (\rho_1 - \rho_2) = \left[ \frac{n_{\lambda_1} - n_{\lambda_2}}{n_{\lambda_0} - 1} \cdot (n_{\lambda_0} - 1) \cdot (\rho_1 - \rho_2) \right] = \frac{\Phi_{\lambda_0}}{\nu} \quad (8.3.3)$$

Допустим, что эти линзы изготовлены из разных сортов стекла, тогда условие ахроматизации будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \Phi_{\lambda_0} = \Phi_1 + \Phi_2 \\ \Delta\Phi = \frac{\Phi_1}{\nu_1} + \frac{\Phi_2}{\nu_2} = 0 \end{cases} \quad (8.3.4)$$

где  $\Phi_{\lambda_0}$  – оптическая сила системы для основной длины волны,  $\Phi_1, \Phi_2$  – оптические силы первой и второй линз для основной длины волны,  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты дисперсии стекла первой и второй линз.

Решив систему линейных уравнений (8.3.4), получим **уравнения ахроматизации** для двух сортов стекла:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \Phi \\ \Phi_2 = -\frac{\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \cdot \Phi \end{cases} \quad (8.3.5)$$

У стекол должны быть разные коэффициенты дисперсии, причем коэффициент дисперсии первой линзы должен быть больше коэффициента дисперсии второй линзы ( $\nu_1 > \nu_2$ ), иначе может получиться так, что система будет состоять из двух компонентов с близкими по величине, но противоположными по знаку оптическими силами. Это приведет к необходимости увеличения оптической силы компонентов, и как следствие, к появлению больших монохроматических аберраций. Обычно для системы из двух линз выбирают  $\nu_1 \approx 60$  (крон),  $\nu_2 \approx 30$  (флинт). Тогда  $\Phi_1 = \frac{60}{30} \cdot \Phi = 2\Phi$ ,

$$\Phi_2 = -\frac{30}{30} \cdot \Phi = -\Phi, \quad \Phi = (2\Phi - \Phi) \quad (\text{рис.8.3.3}).$$

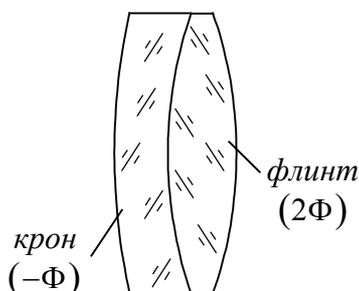


Рис.8.3.3. Ахроматическая система из двух линз.

В этом случае график зависимости положения изображения от длины волны будет выглядеть, как показано на рис.8.3.4. У такой системы нет хроматизма положения:  $\Delta S'_{\lambda_1-\lambda_2} = 0$ .

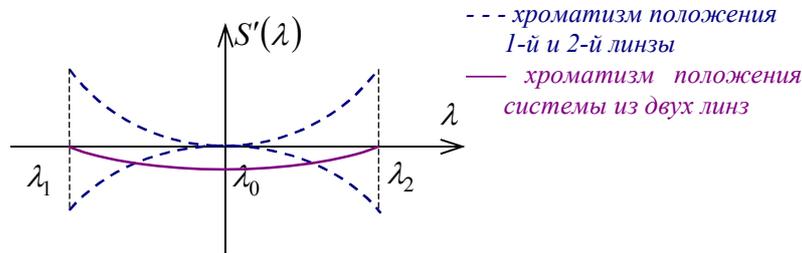


Рис.8.3.4. График хроматизма положения для системы из двух линз.

Разность на краях спектра сводится к нулю, но остается разность положений изображения для центральной  $\lambda_0$  и крайних  $(\lambda_1, \lambda_2)$  длин волн. Это **вторичный хроматизм** или вторичный спектр. Его величина определяется следующим образом:

$$\Delta S_{\lambda} = \frac{S'_{\lambda_1} + S'_{\lambda_2}}{2} - S'_{\lambda_0} \quad (8.3.6)$$

Вторичный спектр гораздо меньше первичного хроматизма положения, но тем не менее, он влияет на качество изображения. Для исправления вторичного спектра требуется не меньше трех сортов стекла с различными коэффициентами дисперсии и относительной частной дисперсией (такие системы называются **апохроматы**). Если при коррекции хроматизма используется еще больше стекол, то такая система называется **суперапохроматом**.

На рис.8.3.5 приведены графики продольного хроматизма первого порядка неахроматизированной и ахроматизированной систем.

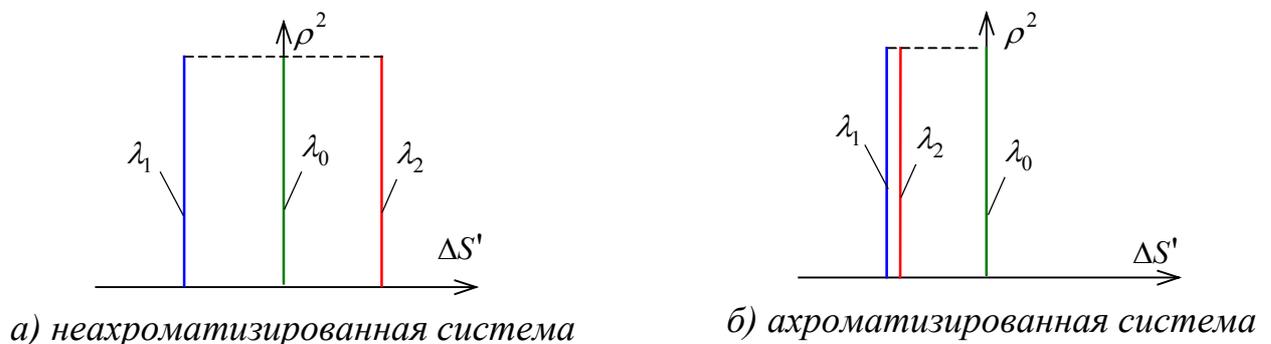


Рис.8.3.5. Продольный хроматизм первого порядка.

Если в оптической системе присутствуют монохроматические aberrации третьего и пятого порядка, то графики продольного хроматизма будут выглядеть, как показано на рис.8.3.6 и рис.8.3.7.

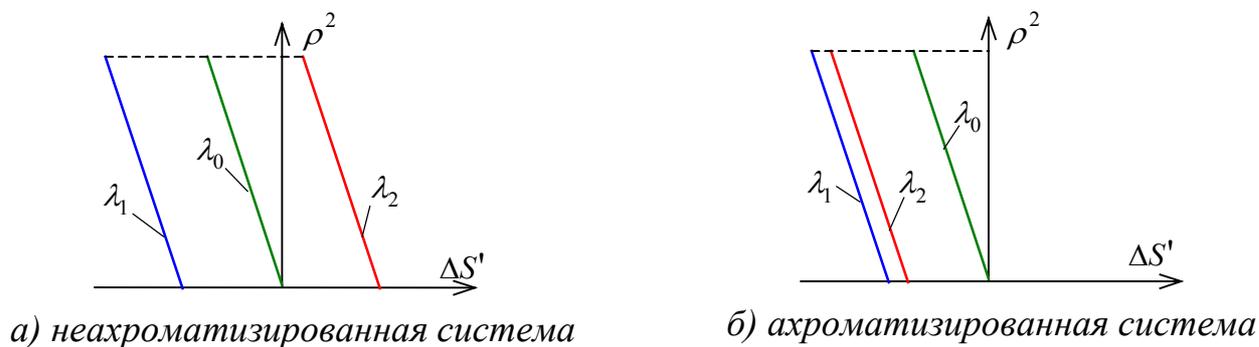


Рис.8.3.6. Продольный хроматизм в присутствии aberrаций третьего порядка.

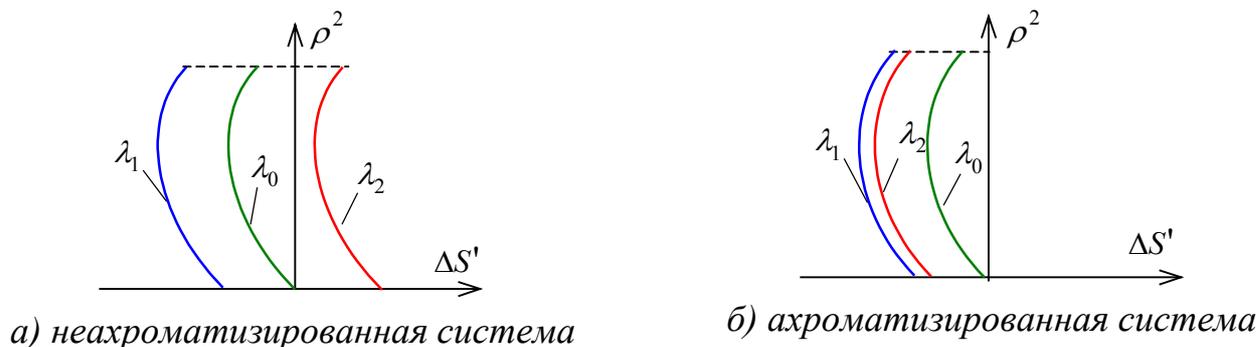


Рис.8.3.7. Присутствуют aberrации третьего и пятого порядков.

Кривые хроматизма могут быть взаимно наклонены, это так называемый **сферохроматизм**, то есть хроматизм сферической aberrации (рис.8.3.8).

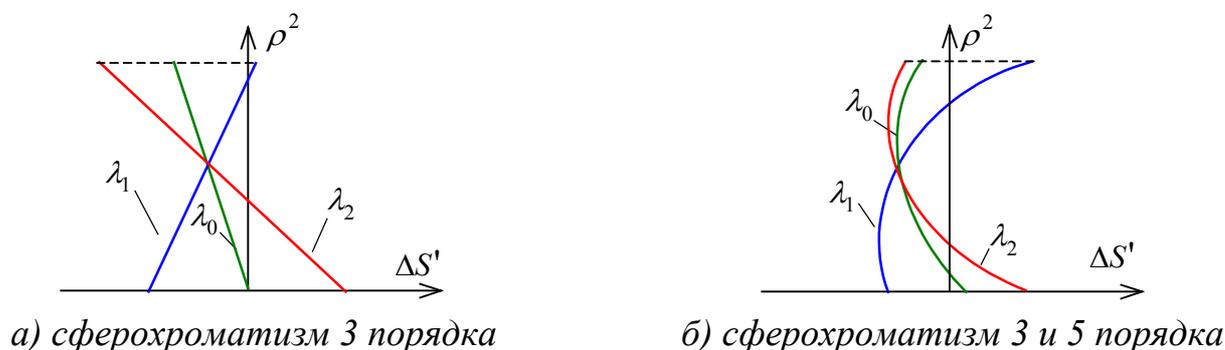


Рис.8.3.8. Сферохроматизм в присутствии aberrаций 3 и 5 порядков.

Как видно из рис.8.3.8, обычно сферохроматизм исправляется для значения  $\rho^2 \approx 0.5$ .

### 8.3.2. Хроматизм увеличения

**Хроматизм увеличения** – это aberrация, при которой увеличение оптической системы зависит от длины волны (рис.8.3.9). Вследствие этого вместо изображения точки образуется цветная полоска.

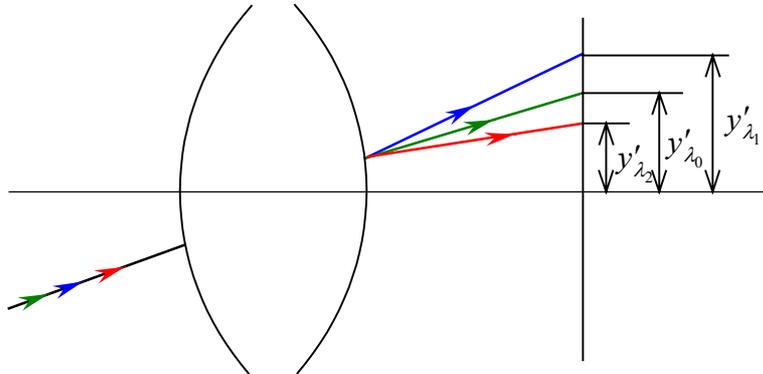


Рис.8.3.9. Хроматизм увеличения.

Численно **абсолютный хроматизм увеличения** (первичный спектр) определяется как разность величины изображения для крайних длин волн:

$$\Delta y'_{xp} = y'_{\lambda_1} - y'_{\lambda_2} \quad (8.3.7)$$

Вторичный спектр (вторичный хроматизм увеличения) определяется как разность величины изображения для центральной и крайних длин волн:

$$\Delta y'_{xp2} = \frac{y'_{\lambda_2} - y'_{\lambda_1}}{2} - y'_{\lambda_0} \quad (8.3.8)$$

Хроматизм увеличения измеряется в тех же единицах, что и величина изображения: для ближнего типа – в миллиметры, для дальнего типа – в угловой мере.

**Относительный хроматизм увеличения:**

первичный спектр:

$$\Delta_{xp} (\%) = \frac{y'_{\lambda_1} - y'_{\lambda_2}}{y'_{\lambda_0}} \cdot 100\% \quad (8.3.9)$$

вторичный спектр:

$$\Delta_{xp2} (\%) = \left( \frac{y'_{\lambda_1} - y'_{\lambda_2}}{y'_{\lambda_0}} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (8.3.10)$$

Если выразить увеличение для различных длин волн в виде:  $V_{\lambda_0} = \frac{y'_{\lambda_0}}{y}$ ,

$V_{\lambda_1} = \frac{y'_{\lambda_1}}{y}$ , то относительный хроматизм увеличения можно записать в

следующем виде:

$$\frac{V_{\lambda_1} - V_{\lambda_2}}{V_{\lambda_0}} \cdot 100\% \quad (8.3.11)$$

Хроматизм увеличения принято рассматривать только в одной плоскости установки. Поскольку типы хроматических aberrаций не связаны друг с другом, хроматизм увеличения может исправляться независимо от хроматизма положения. В частности, если оптическая система тонкая (рис.8.3.10), а апертурная диафрагма совпадает с ней, то хроматизм положения присутствует, а хроматизма увеличения нет.

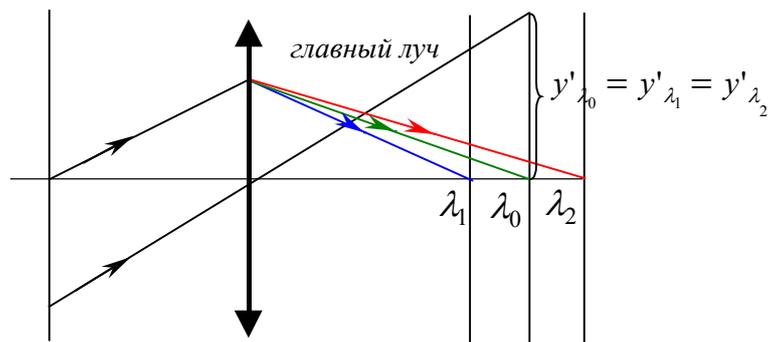


Рис.8.3.10. Хроматизм положения и увеличения тонкой линзы.

Если в системе исправлен первичный хроматизм увеличения, то это ахромат по хроматизму увеличения, если исправлен вторичный хроматизм увеличения, то это апохромат по хроматизму увеличения, если хроматизм увеличения не исправлен, то это неахромат по хроматизму увеличения.

## 9. Структура и качество оптического изображения

### 9.1. Основные характеристики структуры изображения

#### 9.1.1. Основные понятия

Изображающие приборы могут давать изображение различного качества с точки зрения передачи структуры предмета. Структура и форма светового поля в пространстве изображений подобна структуре и форме предмета, однако оптическая система вносит в эту структуру свои изменения, оценка которых есть оценка качества изображения.

Передача структуры предмета или изображения – это отображение оптической системой мелких деталей объекта. Для описания такого отображения необходимо математическое описание предмета и изображения в виде функций  $I(x, y)$  и  $I'(x', y')$ . Эти функции описывают зависимость распределения интенсивности от пространственных координат.

Представим предмет в виде совокупности бесконечного количества светящихся точек. Для того, чтобы считать, что изображение предмета – это совокупность изображений соответствующих точек предмета, оптическая система должна удовлетворять свойствам линейности и инвариантности к сдвигу.

#### Свойство линейности

Изображение суммы объектов равно сумме изображений каждого объекта:

$$\sum O_i \rightarrow \sum I_i \quad (9.1.1)$$

То есть, если предмет – это сумма точек  $\sum O_i$ , то изображение – сумма изображений этих точек  $\sum I_i$ . Изображающие оптические системы полностью линейны.

#### Свойство инвариантности к сдвигу (условие изопланатизма)

При смещении точки ее изображение только смещается на пропорциональную величину (рис.9.1.1):

$$y' = V \cdot y \quad (9.1.2)$$

где  $V$  – обобщенное увеличение.

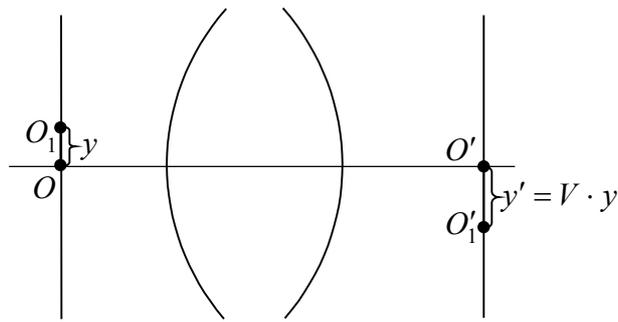


Рис.9.1.1. Условие изопланатизма.

В отличие от условия линейности, условие изопланатизма в оптических системах соблюдается приблизительно, поскольку характер изображения при смещении изменяется. Изопланатизм, как правило, не соблюдается в пределах всего поля, обычно он соблюдается только при небольших смещениях.

**Изопланатическая зона** – это зона, в пределах которой соблюдается условие изопланатизма. Чем больше размер изопланатической зоны, тем лучше изопланатизм. Если зона полностью перекрывает предмет, то система полностью изопланатична. Мы будем рассматривать структуру изображения в пределах одной изопланатической зоны.

### 9.1.2. Функция рассеяния точки

В идеальной оптической системе точка изображается в виде точки, а в реальной оптической системе точка изображается в виде **пятна рассеяния** (рис.9.1.2).

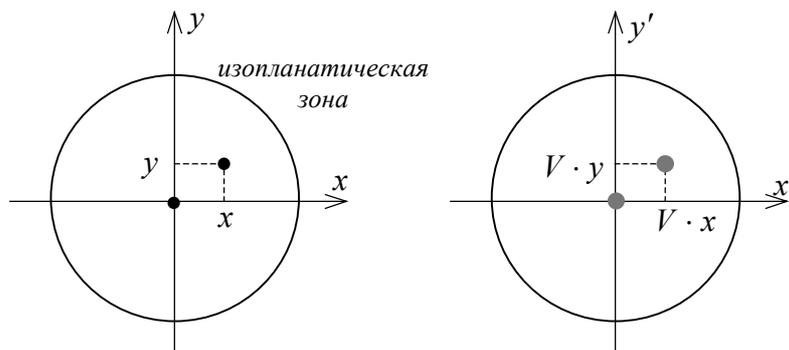


Рис.9.1.2. Изображение точки в пределах изопланатической зоны.

Основной характеристикой, описывающей передачу структуры предмета оптической системой является **функция рассеяния точки**.

**Функция рассеяния точки** (*ФРТ, point spread function, PSF*)  $h(x', y')$  – это функция, описывающая зависимость распределения освещенности от координат в плоскости изображения, если предмет – это светящаяся точка в центре изопланатической зоны.

Зная функцию рассеяния точки, можно найти изображение любого предмета, если разложить его на точки и найти ФРТ от каждой точки. Если есть предмет  $I(x, y)$ , то каждая его точка изображается в виде функции  $h(x' - Vx, y' - Vy)$ , то есть ФРТ смещается в точку с координатами  $(Vx, Vy)$  (рис.9.1.2), а изображение всего предмета будет представлять собой сумму этих изображений:

$$I'(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x, y) \cdot h(x' - Vx, y' - Vy) \cdot dx \cdot dy \quad (9.1.3)$$

Если увеличение  $V$  принять за единицу, то выражение (9.1.3) становится сверткой (конволюцией).

Функция изображения есть свертка функции предмета с функцией рассеяния точки:

$$I'(x', y') = I(x, y) \otimes h(x', y') \quad (9.1.4)$$

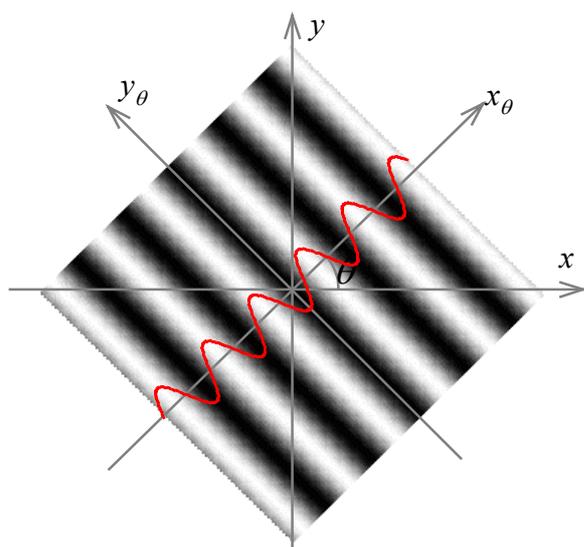
### 9.1.3. Гармонический периодический объект

Предмет кроме разложения на отдельные точки можно разложить на другие элементарные части – периодические решетки.

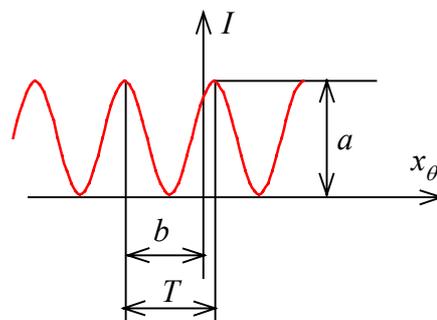
**Периодическая решетка** – это структура с белыми и черными полосами.

**Гармоническая периодическая решетка** – это структура, интенсивность которой описывается гармонической функцией (рис.9.1.3).

В электронике существует аналог гармонической решетки – периодический во времени сигнал на входе прибора.



а) распределение интенсивности



б) сечение распределения интенсивности

Рис.9.1.3. Гармоническая периодическая решетка.

Гармоническая периодическая решетка описывается выражением:

$$I(x_\theta) = a \cdot \cos\left(2\pi \frac{x_\theta - b}{T}\right) \quad (9.1.5)$$

где  $a$  – вещественная амплитуда,  $b$  – сдвиг,  $T$  – период,  $\theta$  – угол ориентации.

Вместо периода можно использовать **пространственную частоту**  $\nu = \frac{1}{T}$ , а вместо вещественной амплитуды и сдвига – комплексную амплитуду:

$$u = a \cdot e^{2\pi i \cdot \nu \cdot b} \quad (9.1.6)$$

Тогда интенсивность гармонической решетки в комплексной форме:

$$I(x_\theta) = u \cdot e^{2\pi i \cdot \nu \cdot x_\theta} \quad (9.1.7)$$

Величину  $x_\theta$  можно выразить как  $x_\theta = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$ , тогда интенсивность гармонической решетки будет зависеть от двух координат  $(x, y)$ :

$$I(x_\theta) = u \cdot e^{2\pi i (x \cdot \nu \cdot \cos \theta + y \cdot \nu \cdot \sin \theta)} = u \cdot e^{2\pi i (\nu_x \cdot x + \nu_y \cdot y)} = \tilde{I}(x, y) \quad (9.1.8)$$

где  $\nu_x$  – частота в направлении  $x$ ,  $\nu_y$  – частота в направлении  $y$ .

Любой объект, как было сказано выше, можно разложить на элементарные гармонические объекты, тогда изображение – это совокупность изображений элементарных объектов. Эти изображения для реальных оптических систем всегда имеют искажения, что связано с законом сохранения энергии. Идеальные оптические системы нарушают закон сохранения энергии, так как они для сохранения неизменной структуры предмета должны передавать бесконечно большую энергию.

Изображение гармонического объекта можно описать, если в выражение (9.1.3) подставить в качестве распределения интенсивности на предмете функцию  $\tilde{I}(x, y)$  (9.1.8):

$$\tilde{I}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(x, y) \cdot h(x' - Vx, y' - Vy) \cdot dx dy \quad (9.1.9)$$

Если выразить координаты предмета и изображения в едином масштабе, то  $V = 1$ , следовательно:

$$\tilde{I}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i (\nu_x x + \nu_y y)} \cdot h(x' - x, y' - y) \cdot dx dy$$

После замены переменных  $x' - x = \mathcal{G}$   $dx = -d\mathcal{G}$   $x = x' - \mathcal{G}$   
 $y' - y = \omega$   $dy = -d\omega$   $y = y' - \omega$  получим:

$$\tilde{T}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i(v_x(x'-v) + v_y(y'-w))} \cdot h(\mathcal{G}, \omega) \cdot d\mathcal{G}d\omega$$

или, после переобозначения  $\mathcal{G} = x$ ,  $\omega = y$ :

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x', y') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i(v_x(x'-x) + v_y(y'-y))} \cdot h(x, y) \cdot dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot e^{2\pi i(v_x x' + v_y y')} \cdot e^{-2\pi i(v_x x + v_y y)} \cdot h(x, y) \cdot dx dy = \\ &= u \cdot e^{2\pi i(v_x x' + v_y y')} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) \cdot e^{-2\pi i(v_x x + v_y y)} \cdot dx dy = \\ &= u \cdot e^{2\pi i(v_x x' + v_y y')} \cdot D(v_x, v_y) \end{aligned} \tag{9.1.10}$$

Двойной интеграл в выражении (9.1.10) – это некоторая функция  $D(v_x, v_y)$ , зависящая от пространственных частот.

Обозначим  $u' = u \cdot D(v_x, v_y)$ , и запишем распределение интенсивности на изображении гармонического объекта в следующем виде:

$$\| \tilde{T}(x', y') = u' \cdot e^{2\pi i(v_x x' + v_y y')} \tag{9.1.11}$$

Как показывают соотношения (9.1.8) и (9.1.11), изображение от предмета отличается только комплексной амплитудой, то есть изображение гармонической решетки любой оптической системы есть гармоническая решетка с той же частотой. Поэтому гармоническую решетку удобно использовать для исследования и оценки передачи структуры изображения. Изменение комплексной амплитуды гармонической решетки – это и есть действие оптической системы.

#### 9.1.4. Оптическая передаточная функция (ОПФ)

**Оптическая передаточная функция** (*optical transfer function, OTF*)  $D(v_x, v_y)$  характеризует передачу структуры предмета оптической системой как функция пространственных частот:

$$\| u' = u \cdot D(v_x, v_y) \tag{9.1.12}$$

ОПФ связана с ФРТ интегральным преобразованием – преобразованием Фурье:

$$D(v_x, v_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) \cdot e^{-2\pi i(v_x x + v_y y)} \cdot dx dy \quad (9.1.13)$$

или

$$ОПФ = F[ФРТ]$$

или

$$ФРТ \xleftrightarrow{F} ОПФ$$

где  $F$  – обозначение Фурье преобразования:

$$F[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-2\pi i(v_x x + v_y y)} \cdot dx dy \quad (9.1.14)$$

ФРТ показывает, как оптическая система изображает точку, а ОПФ показывает, как оптическая система изображает гармоническую решетку, то есть как меняется комплексная амплитуда решетки в зависимости от частоты.

Оптическая передаточная функция – это комплексная функция:

$$D(v_x, v_y) = T(v_x, v_y) \cdot e^{i\varphi(v_x, v_y)} \quad (9.1.15)$$

Модуль ОПФ  $T(v_x, v_y) = |D(v_x, v_y)|$  называется **модуляционной передаточной функцией (МПФ)** или **частотно-контрастной характеристикой (ЧКХ)**. Аргумент (фаза) ОПФ  $\varphi(v_x, v_y) = \arg[D(v_x, v_y)]$  называется **фазовой передаточной функцией (ФПФ)** или **частотно-фазовой характеристикой (ЧФК)**.

Частотно-контрастная характеристика показывает передачу вещественной амплитуды гармонического объекта:

$$ЧКХ = \frac{a'}{a} \quad (9.1.16)$$

где  $a$  – амплитуда на предмете,  $a'$  – амплитуда на изображении.

Амплитуда изображения гармонического объекта тесно связана с контрастом. Контраст для периодических (гармонических) изображений (рис.9.1.4) определяется выражением:

$$k' = \frac{I'_{\max} - I'_{\min}}{I'_{\max} + I'_{\min}} \quad (9.1.17)$$

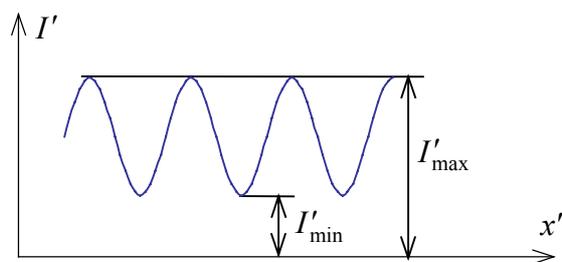
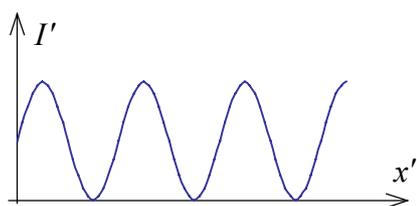
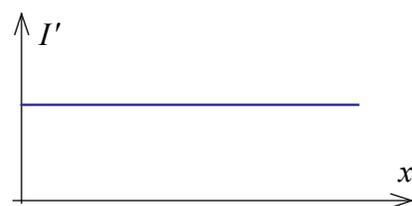


Рис.9.1.4. Контраст гармонического объекта.

$0 \leq k' \leq 1$ . **Абсолютный контраст**  $k' = 1$  получается, когда  $I'_{\min} = 0$  (рис.9.1.5.а). Контраст в изображении нулевой  $k' = 0$ , когда  $I'_{\min} = I'_{\max}$  – изображение практически отсутствует (рис.9.1.5.б).



а) абсолютный контраст



б) нулевой контраст

Рис.9.1.5. Абсолютный и нулевой контраст гармонического объекта.

Чем больше контраст, тем лучше различаются мелкие детали изображения. Изображение нельзя зарегистрировать или увидеть в случае, если:

$$k' < \delta k' \quad (9.1.18)$$

где  $\delta k'$  – порог контраста, зависящий от приемника изображения (например, для глаза  $\delta k' \approx 0.05$ ).

Контраст для изображения гармонического объекта может быть выражен через постоянную  $a'_0$  и переменную  $a'$  составляющие изображения гармонического объекта (рис.9.1.6):

$$k' = \frac{a'}{a'_0} \quad (9.1.19)$$

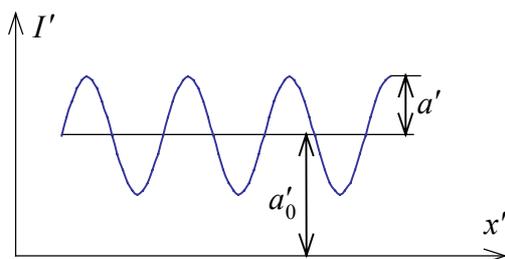


Рис.9.1.6. Постоянная и переменная составляющие изображения гармонического объекта.

Если  $a'_0 = a_0$ , то ЧКХ, как следует из выражения (9.1.16) будет определяться следующим соотношением:

$$\text{ЧКХ} = \frac{k'}{k} \quad (9.1.20)$$

где  $k'$  – контраст изображения,  $k$  – контраст предмета.

Частотно-контрастная характеристика показывает зависимость контраста изображения гармонической решетки от частоты решетки, если считать, что на предмете контраст единичный (рис.9.1.7). Для идеальной оптической системы ЧКХ – прямая, параллельная оси.

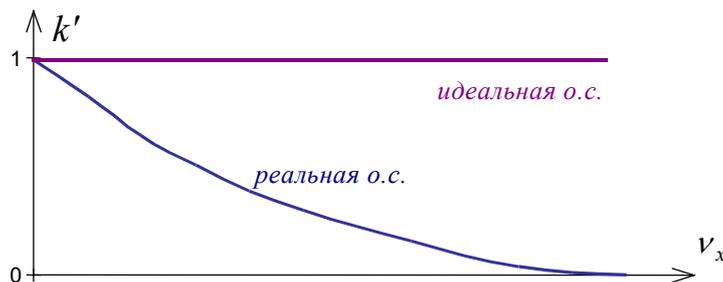


Рис.9.1.9. Частотно-контрастная характеристика.

Для ближнего типа предмета или изображения пространственная частота  $\nu$  измеряется в  $\left[ \frac{\text{лин}}{\text{мм}} \right]$ . Для дальнего типа пространственная частота измеряется в  $\left[ \frac{\text{лин}}{\text{рад}} \right]$ .

Итак, передача структуры изображения описывается ФРТ или ОПФ, которые связаны через взаимно однозначные преобразования Фурье. Наглядно отобразить двумерную функцию ОПФ можно в виде:

- графиков сечений  $T(\nu_x)$  или  $T(\nu_y)$ ,
- изометрического изображения “поверхности”  $T(\nu_x, \nu_y)$ ,
- карты уровней  $T(\nu_x, \nu_y)$ .

## 9.2. Схема формирования оптического изображения

Существует два фактора, которые влияют на структуру и качество изображения в оптической системе: дифракция и aberrации. Эти факторы действуют совместно. Если aberrации малы и преобладает дифракция, то такие системы называются **дифракционно-ограниченными**. Если aberrации велики, и дифракция теряется на фоне aberrаций, то такие системы называются **геометрически-ограниченными** (формирование изображения вполне корректно описывается с позиций геометрической оптики, без привлечения теории дифракции).

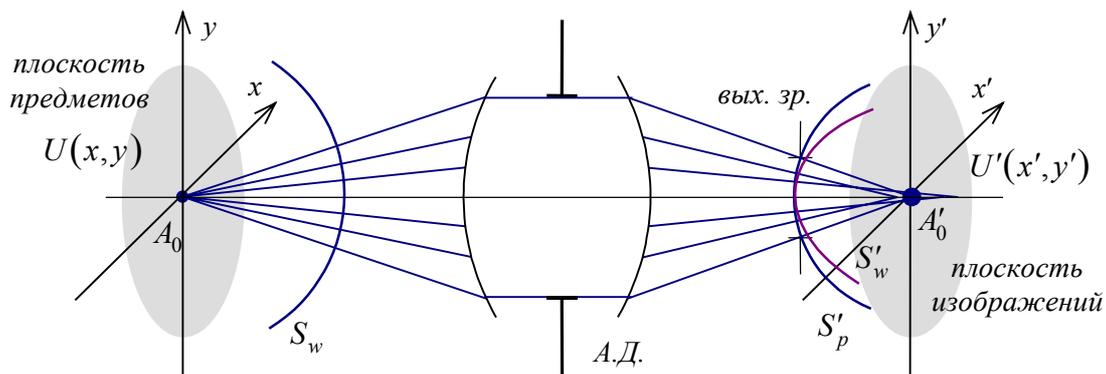


Рис.9.2.1. Схема формирования оптического изображения.

Рассмотрим формирование изображения некоторой точки (рис.9.2.1). Гомоцентрический пучок лучей выходит из точки  $A_0$ , и после идеальной оптической системы сходится в точке  $A'_0$ . Наряду с пучками лучей можно также рассматривать сферические волновые фронты  $S_w$  и  $S'_w$ . Действие реальной оптической системы сводится к следующим факторам:

- преобразование расходящегося пучка лучей (волнового фронта) в сходящийся,
- ограничение размеров проходящего пучка лучей или волнового фронта,
- ослабление интенсивности (энергии) проходящего поля,
- нарушение гомоцентричности пучка или сферичности волнового фронта, то есть изменение фазы проходящего поля.

Рассмотрим поле  $U'(P'_x, P'_y)$  на выходной сфере (в области выходного зрачка). Волновой фронт близок к выходной сфере, но отличается от нее на величину волновой аберрации. Поле на волновом фронте  $U'_{в.ф.}(P'_x, P'_y)$ . Оптический путь из центра предмета до волнового фронта для всех лучей одинаковый, так как волновой фронт – поверхность равного эйконала. Поскольку для формирования изображения важна разность фаз между выходной сферой и волновым фронтом, а не сама фаза, то можно принять, что фаза волнового фронта равна нулю  $\varphi = 0$ . При отсутствии аберраций амплитуда поля единичная, следовательно поле на волновом фронте  $U'_{в.ф.}(P'_x, P'_y) = 1$ . Набег фазы от выходной сферы до волнового фронта:

$$\Delta\varphi = e^{2\pi i \frac{\Delta l' \cdot n'}{\lambda}} \quad (9.2.1)$$

где  $\Delta l'$  – расстояние между волновым фронтом и выходной сферы вдоль луча.

Поле на выходной сфере математически можно представить в виде:

$$U'(P'_x, P'_y) = \begin{cases} e^{2\pi i W(P'_x, P'_y)}, & \text{внутри зрачка} \\ 0, & \text{вне зрачка} \end{cases} = f(P'_x, P'_y) \quad (9.2.2)$$

где  $W(P'_x, P'_y) = \frac{\Delta l' \cdot n'}{\lambda}$  – волновая абберрация,  $f(P'_x, P'_y)$  – зрачковая функция.

В выражении (9.2.2) учитывается одновременно ограничение пучков и наличие аббераций.

**Зрачковая функция** (*pupil function, PF*) показывает влияние оптической системы на прохождение электромагнитного поля от точки предмета до выходного зрачка и в общем случае в канонических координатах описывается выражением:

$$f(\rho_x, \rho_y) = \begin{cases} \tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y) \cdot e^{2\pi i W(\rho_x, \rho_y)}, & \text{внутри } \Omega_0 \\ 0, & \text{вне } \Omega_0 \end{cases} \quad (9.2.3)$$

где  $(\rho_x, \rho_y)$  – канонические зрачковые координаты,  $\tau(\rho_x, \rho_y)$  – функция пропускания по зрачку,  $\Omega_0$  – область зрачка в канонических координатах.

Теперь нужно перейти от поля на выходном зрачке к полю на изображении. Вблизи изображения геометрическая оптика не применима, поэтому для описания поля на изображении следует использовать теорию дифракции.

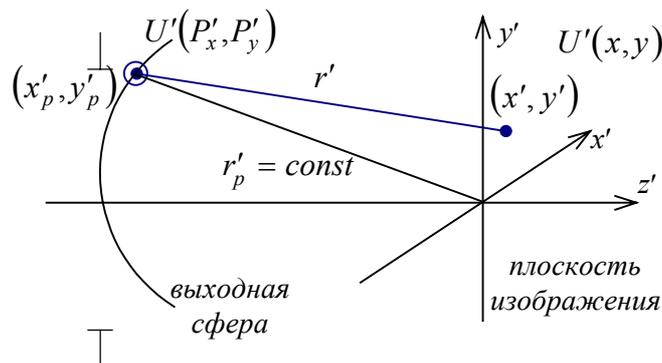


Рис.9.2.2. Формирование комплексной амплитуды в плоскости изображения.

Для вычисления комплексной амплитуды поля в плоскости изображения применим принцип Гюйгенса в форме интеграла Гюйгенса-Френеля. Рассматриваемая область находится вблизи центра выходной сферы (рис.9.2.2):

$$U'(x', y') = \iint_{S'_p} U'(x'_p, y'_p) e^{\frac{2\pi i n' r'}{\lambda}} \frac{1}{r'} dS'_p \quad (9.2.4)$$

Используя зрачковую функцию, выражение (9.2.4) можно записать в виде:

$$U'(x', y') = \iint f(\rho_x, \rho_y) \frac{e^{\frac{2\pi i r' n'}{\lambda}}}{r'} d\rho_x d\rho_y \quad (9.2.5)$$

Поскольку  $r' = r'_p + \Delta r'$  и  $|\Delta r'| \ll r'_p$ , то множитель  $e^{\frac{2\pi i r' n'}{\lambda}}$  можно представить в виде  $e^{\frac{2\pi i r'_p n'}{\lambda}} = e^{\frac{2\pi i r'_p n'}{\lambda}} \cdot e^{\frac{2\pi i \Delta r' n'}{\lambda}}$ . Множитель  $e^{\frac{2\pi i r'_p n'}{\lambda}} = const$ , следовательно его можно вынести за интеграл, и не учитывать, так как нас интересует только относительное распределение комплексной амплитуды. Тогда выражение (9.2.5) преобразуется так:

$$U'(x', y') = \iint f(\rho_x, \rho_y) \frac{e^{\frac{2\pi i \Delta r' n'}{\lambda}}}{r'} d\rho_x d\rho_y \quad (9.2.6)$$

$\Delta r'$  можно выразить через  $x', y'$  и  $x'_p, y'_p$  (рис.9.2.3).

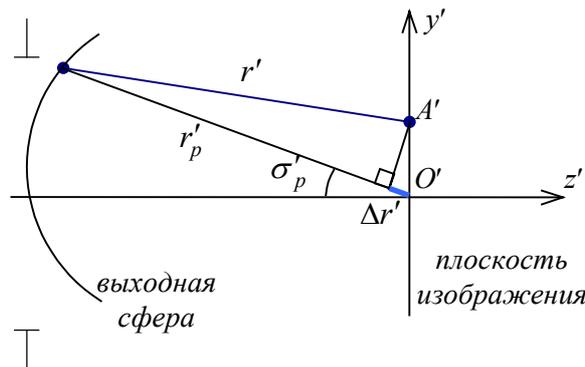


Рис.9.2.3. Связь  $\Delta r'$  с радиусом выходной сферы  $r'_p$  и расстоянием  $r'$  от выходной сферы до точки  $A'$ .

Отрезок  $OA = \Delta r' \approx -\frac{x'_p x' + y'_p y'}{r'_p}$ , причем  $n' \sin \sigma'_A = A'$  – для крайнего луча,

а для остальных лучей:  $\frac{n' x'_p}{r'_p} = \rho_x A'$ ,  $\frac{n' y'_p}{r'_p} = \rho_y A'$ . Теперь интеграл (9.2.6) можно

записать так:

$$U'(x', y') = \iint f(\rho_x, \rho_y) \frac{e^{-\frac{2\pi i (x'_p \rho_x + y'_p \rho_y) A'}{\lambda}}}{r'} d\rho_x d\rho_y \quad (9.2.7)$$

Введем **канонические (приведенные) координаты** на предмете и изображении:

$$\begin{aligned} \eta_x &= -x \frac{A_x}{\lambda} & \eta'_x &= -x' \frac{A'_x}{\lambda} \\ \eta_y &= -y \frac{A_y}{\lambda} & \eta'_y &= -y' \frac{A'_y}{\lambda} \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

Тогда в канонических координатах получим:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = \iint f(\rho_x, \rho_y) \cdot e^{2\pi i(\eta'_x \rho_x + \eta'_y \rho_y)} d\rho_x d\rho_y \quad (9.2.9)$$

Так как зрачковая функция вне зрачка равна нулю, интегрирование происходит внутри зрачка. Комплексная амплитуда в изображении точки в канонических координатах, как следует из выражения (9.2.9), связана со зрачковой функцией через обратное преобразование Фурье:

$$U'(\eta'_x, \eta'_y) = F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)] \quad (9.2.10)$$

Комплексная амплитуда поля в изображении точки есть обратное Фурье-преобразование от зрачковой функции в канонических координатах.

Функция рассеяния точки – это распределение не амплитуды поля, а интенсивности, то есть квадрата модуля комплексной амплитуды  $|U'(\eta'_x, \eta'_y)|^2$ .

Тогда для ФРТ можно получить следующее выражение:

$$h(\eta'_x, \eta'_y) = |F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]|^2 \quad (9.2.11)$$

Оптическую передаточную функцию также можно выразить в канонических координатах:

$$D(\omega_x, \omega_y) = F[h(\eta_x, \eta_y)] \quad (9.2.12)$$

где  $\omega_x, \omega_y$  – канонические пространственные частоты:

$$\begin{aligned} \omega_x &= -v_x \frac{\lambda}{A_x} = -v'_x \frac{\lambda}{A'_x} = \omega'_x \\ \omega_y &= -v_y \frac{\lambda}{A_y} = -v'_y \frac{\lambda}{A'_y} = \omega'_y \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Канонические частоты безразмерные:  $\frac{\text{лин}}{\text{мм}} \cdot \frac{\text{мм}}{\sin}$ . В этих координатах

получаем простую связь зрачковой функции с оптической передаточной функцией:

$$D(\omega_x, \omega_y) = F\left[|F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]|^2\right] \quad (9.2.14)$$

Это выражение в соответствии со свойством преобразования Фурье можно представить через автокорреляцию зрачковой функции:

$$D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Omega_0} \iint f(\rho_x, \rho_y) \cdot f^*(\rho_x - \omega_x, \rho_y - \omega_y) \cdot d\rho_x d\rho_y \quad (9.2.15)$$

где  $\Omega_0$  – площадь зрачка в канонических координатах.

### 9.3. Дифракционная структура изображения

#### 9.3.1. Функция рассеяния точки в случае отсутствия аберраций

Предположим, что в оптической системе аберрации отсутствуют  $W(\rho_x, \rho_y) = 0$ . Тогда зрачковая функция оптической системы в соответствии с выражением (9.2.3) будет выглядеть следующим образом:

$$f_0(\rho_x, \rho_y) = \begin{cases} \tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y), & \text{внутри } \Omega_0 \\ 0, & \text{вне } \Omega_0 \end{cases} \quad (9.3.1)$$

где  $\Omega_0$  – область зрачка в канонических координатах.

Будем считать, что пропускание равномерно по зрачку, то есть  $\tau^{1/2}(\rho_x, \rho_y) = 1$ . Тогда, поскольку в канонических координатах зрачок всегда круглый, выражение (9.3.1) можно записать следующим образом:

$$f_0(\rho_x, \rho_y) = \begin{cases} 1, & \text{при } (\rho_x^2 + \rho_y^2) \leq 1 \\ 0, & \text{при } (\rho_x^2 + \rho_y^2) > 1 \end{cases} \quad (9.3.2)$$

То есть зрачковая функция равна единице в пределах круга, и нулю на всей остальной области, и следовательно, математически описывается при помощи функции  $Circ(\rho_x, \rho_y)$ :

$$f_0(\rho_x, \rho_y) = Circ(\rho_x, \rho_y) \quad (9.3.3)$$

Чтобы получить функцию рассеяния точки при отсутствии аберраций, нужно взять обратное преобразование Фурье от безаберрационной зрачковой функции, то есть от функции  $Circ(\rho_x, \rho_y)$ :

$$h_0(\rho_x, \rho_y) = \left| F^{-1}[Circ(\rho_x, \rho_y)] \right|^2 = \left[ \frac{J_1(2\pi\eta)}{\pi\eta} \right]^2 = Bessinc^2(\eta) \quad (9.3.4)$$

где  $\eta = \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}$ ,  $J_1(2\pi\eta)$  – функция Бесселя первого рода, первого порядка.

Картина ФРТ для безабберационной оптической системы (рис.9.3.1) состоит из центрального максимума диаметром 1.22 канонических единиц и побочных максимумов – колец с шагом, постепенно приближающимся к 0.5 канонических единиц. Безабберационная ФРТ симметрично относительно оптической оси. Центральный максимум содержит 83.8% всей энергии (его высота равна единице), первое кольцо – 7.2% (высота 0.0175), второе 2.8% (высота 0.0045), третье 1.4% (высота 0.0026), четвертое 0.9%.

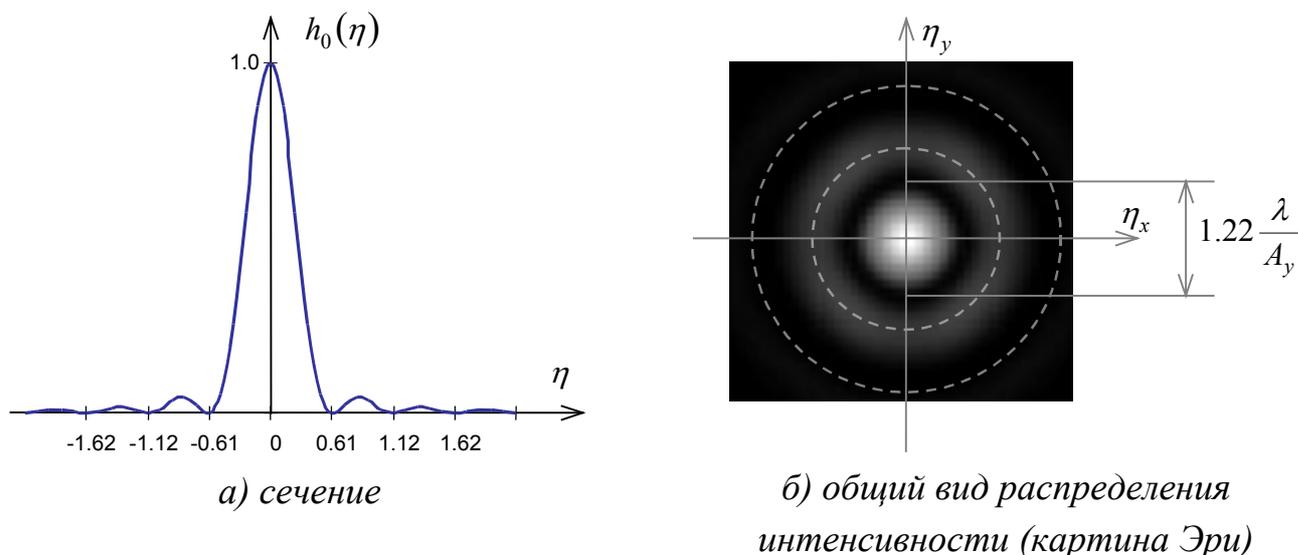


Рис.9.3.1. Функция рассеяния точки в отсутствие aberrаций.

Центральный максимум ФРТ называется **диск Эри (Airy)**. Диаметр диска Эри в реальных координатах на изображении:

$$D = \frac{1.22\lambda}{A'_0} \quad (9.3.5)$$

где  $A'_0$  – апертура осевого пучка.

Диск Эри в общем случае может быть не круглым, если меридиональная  $A'_y$  и сагиттальная  $A'_x$  апертуры различны.

Из выражения (9.3.5) следует, что поскольку апертура для изображения ближнего типа не может быть больше показателя преломления, изображение точки для ближнего типа не может быть меньше длины волны.

### 9.3.2. Влияние неравномерности пропускания по зрачку на ФРТ

На рис.9.3.2 показан вид ФРТ для различных функций пропускания. Если пропускание уменьшается к краям зрачка (2), то центральный максимум ФРТ расширяется, а кольца исчезают. Если пропускание увеличивается к краям зрачка (3), то центральный максимум сужается, а интенсивность колец

увеличивается. Эти изменения по-разному влияют на структуру изображения сложного объекта, и, в зависимости от требований, используются различные функции пропускания, “накладываемые” на область зрачка. Это явление называется **аподизацией**.

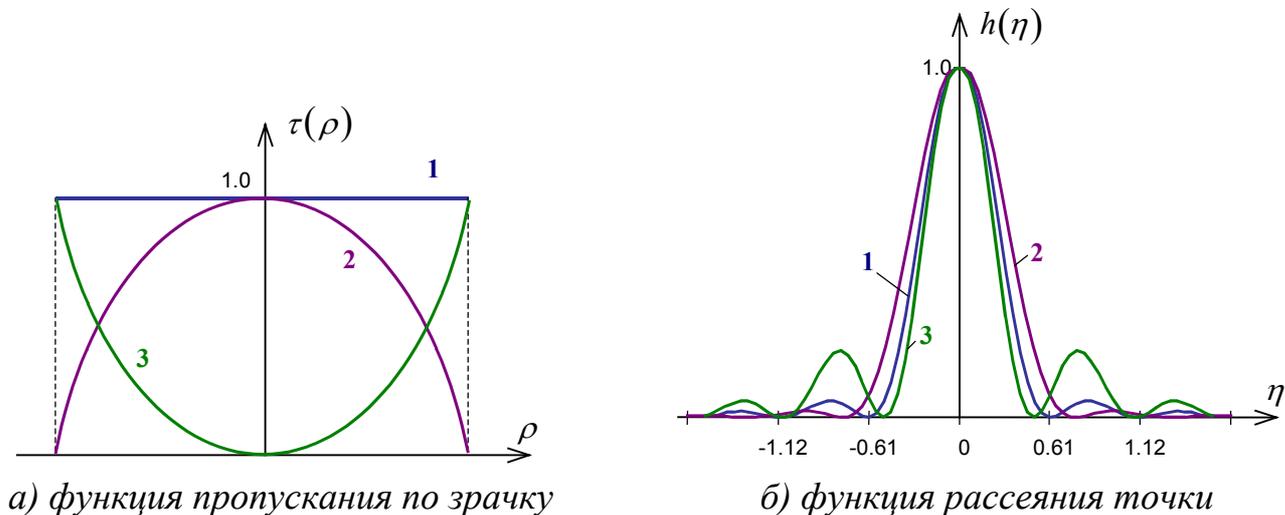


Рис.9.3.2. Влияние неравномерности пропускания по зрачку на ФРТ.

### 9.3.3. Безабберационная ОПФ. Предельная пространственная частота

Оптическая передаточная функция вычисляется при помощи выражения для автокорреляции зрачковой функции (9.2.15). Для безабберационной оптической системы волновая aberrация  $W = 0$ , тогда интеграл автокорреляции будет выглядеть следующим образом:

$$D(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{\Omega_0} \iint_{\Omega(\omega_x, \omega_y)} d\rho_x d\rho_y = \frac{\Omega(\omega_x, \omega_y)}{\Omega_0} \quad (9.3.6)$$

где  $\Omega(\omega_x, \omega_y)$  – область интегрирования, показанная на рис.9.3.3.

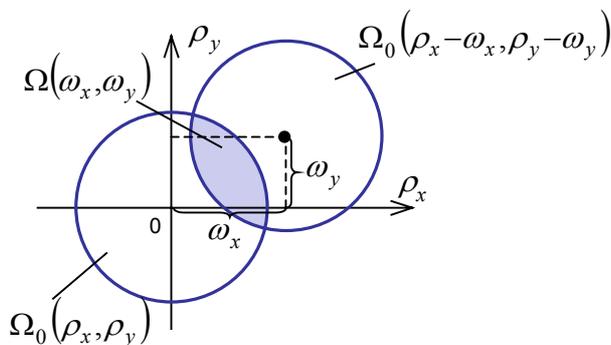


Рис.9.3.3. Области зрачков, смещенные относительно друг друга на  $(\omega_x, \omega_y)$ .

Таким образом, безабберационная ОПФ пропорциональна площади перекрытия двух зрачков  $\Omega(\omega_x, \omega_y)$ , которая является функцией пространственных частот. Из рис.9.3.3 следует, что **максимальная каноническая пространственная частота**  $\omega_{\max} = 2$ . Для более высоких частот площадь  $\Omega(\omega_x, \omega_y)$  становится нулевой (рис.9.3.4).

Максимальной канонической пространственной частоте соответствует предельные реальные пространственные частоты:

$$\nu_{\lim x} = \frac{2A'_x}{\lambda}, \quad \nu_{\lim y} = \frac{2A'_y}{\lambda} \quad (9.3.7)$$

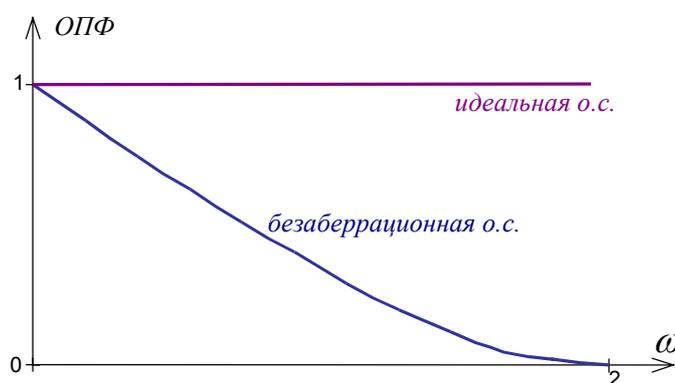


Рис.9.3.4. Безабберационная ОПФ.

Таким образом, для реальной оптической системы при отсутствии aberrаций ОПФ не соответствует ОПФ идеальной системы, и всегда ограничена предельными частотами, обусловленными дифракцией света.

## 9.4. Критерии качества оптического изображения

### 9.4.1. Предельная разрешающая способность по Релею

Разрешающая способность определяет способность оптической системы изображать раздельно два близко расположенных точечных предмета.

**Предельная разрешающая способность** – это минимальное расстояние  $\sigma_R$  между двумя точками, при котором их изображение отличимо от изображения одной точки.

Критерий Релея гласит, что при провале в распределении интенсивности в изображении двух близких точек в 20% точки будут восприниматься как раздельные. Для этого необходимо, чтобы центральный максимум в изображении одной точки приходился бы на первый минимум в изображении

другой (рис.9.4.1). Для оптических систем при отсутствии aberrаций  $\sigma_R = 0.61$  канонических единиц.

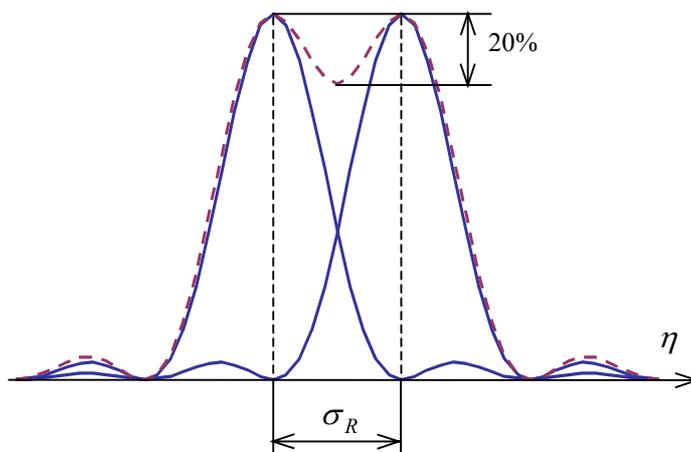


Рис.9.4.1. Разрешение по Релею.

Разрешение по Релею удовлетворительно характеризует качество изображения астрономических телескопов, спектральных приборов, для которых предметами являются близко расположенные точки или линии, а также визуальных приборов (предназначенных для работы с глазом).

#### 9.4.2. Разрешающая способность по Фуко

Критерий Фуко применяется для оценки качества изображения оптических систем, передающих объекты сложной структуры. Разрешающая способность  $R$  определяется как максимальная пространственная частота периодического тест-объекта, состоящего из черно-белых штрихов (миры Фуко), в изображении которого еще различимы штрихи. Разрешающую способность обычно определяют для миры единичного (абсолютного) контраста по графику ЧКХ оптической системы (рис.9.4.2). Разрешающая способность  $R$  определяется для заданного контраста (обычно для контраста  $k' = 0.2$ ).

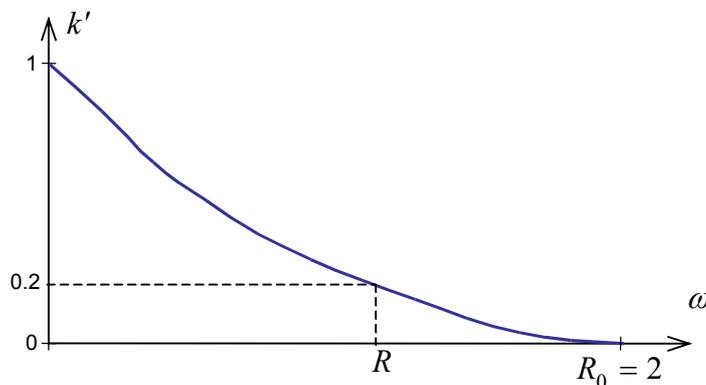


Рис.9.4.1. Разрешающая способность по Фуко.

Предельная разрешающая способность  $R_0$  для оптических систем определяется размерами зрачка, длиной волны и aberrациями. В реальных пространственных частотах предельная разрешающая способность определяется из выражения (9.3.7).

### 9.5. Влияние aberrаций на ФРТ и ОПФ

Влияние малых aberrаций (волновая aberrация составляет доли длин волн) на ФРТ проявляется в том, что часть энергии из центрального максимума переходит в кольца. В результате в центральном максимуме остается около 60-70% вместо 84%, при этом размеры центрального максимума сохраняются, а интенсивность в центре уменьшается (рис.9.5.1).

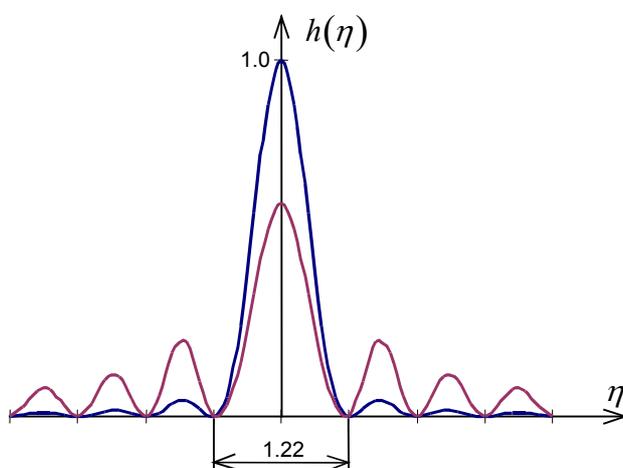


Рис.9.5.1. Влияние aberrаций на ФРТ.

Aberrации разных типов по-разному влияют на вид пятна рассеяния (картину Эри). В случае симметричных aberrаций (расфокусировка, сферическая) сохраняется радиальная симметрия пятна (рис.9.5.2.а). В случае несимметричных aberrаций (кома, астигматизм) симметрия пятна нарушается (рис.9.5.2.б, рис.9.5.2.в).

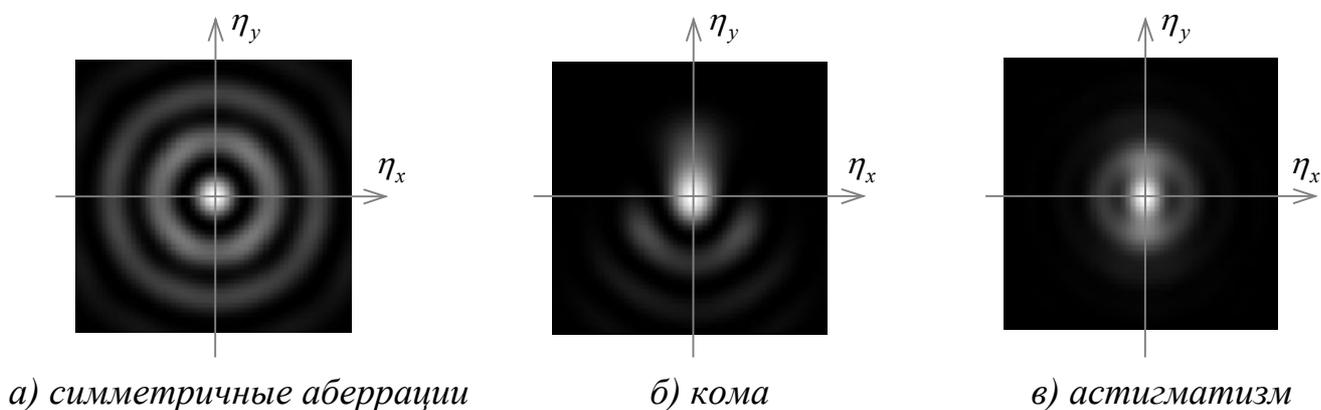


Рис.9.5.2. Картины Эри для aberrаций различных типов.

При дальнейшем увеличении aberrаций сходство ФРТ с безаберрационной полностью теряется, и ее форма определяется картиной поперечных aberrаций (точечной диаграммой). Практически вся энергия из центрального максимума перекачивается в кольца (в центральном максимуме остается меньше 40% энергии). Однако при этом сохраняется дифракционный узор с шагом 0.5 в канонических координатах.

### 9.5.1. Число Штреля

Поскольку при малых aberrациях часть энергии из центрального максимума перекачивается в кольца, уменьшается интенсивность в центральном максимуме. Обозначим значение ФРТ в ее максимуме при отсутствии aberrаций  $h_0(0)$ , а при наличии aberrаций  $h(0)$  (рис.9.5.3).

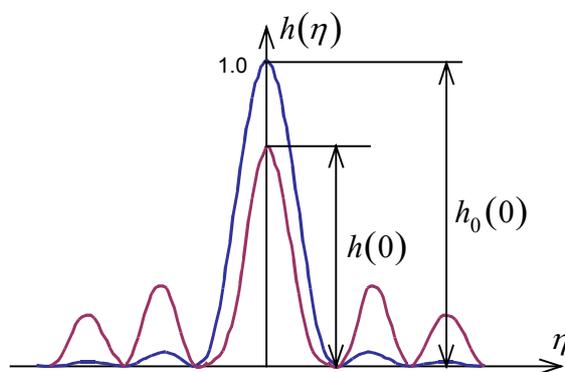


Рис.9.5.3. Число Штреля.

**Число Штреля** (критерий Штреля, *Strehl ratio*) показывает влияние aberrаций на ФРТ:

$$St = \frac{h(0)}{h_0(0)} \quad (9.5.1)$$

Значение числа Штреля находится в пределах  $0 \leq St \leq 1$ , энергия в кольца перекачивается в таком же соотношении. Если  $St = 1$  – оптическая система безаберрационная, если  $St \geq 0.8$  – система практически безаберрационная, поскольку уменьшение центрального максимума на 20% почти незаметно.

### 9.5.2. Критерий Релея для малых aberrаций

Критерий или допуск Релея заключается в том, что если величина волновой aberrации (при условии что в системе присутствует только сферическая aberrация) не превосходит  $\lambda/4$  (рис.9.5.4), то число Штреля  $St \geq 0.8$ . Отсюда Релей распространил свой критерий и на другие типы aberrаций.

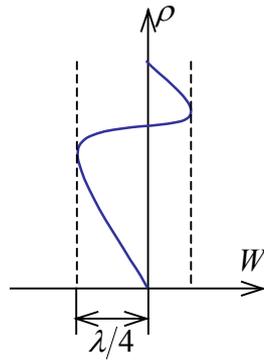


Рис.9.5.4. Величина волновой aberrации.

### Релеевский допуск на остаточные aberrации:

$$|W_{\max}| < \lambda/4 \quad (9.5.2)$$

Однако расчеты показывают, что не для всех типов aberrаций это справедливо. Кроме того, для более строгого анализа нужно проверить на сколько изменится число Штреля при  $|W_{\max}| = \lambda/6$  или  $|W_{\max}| = \lambda/3$ . Релеевский допуск точного ответа на этот вопрос не дает.

### 9.5.3. Формула Марешаля. Допуск Марешаля для малых aberrаций

Французский оптик Марешаль получил свое аналитическое выражение и свой допуск в виде среднеквадратичного по зрачку значения волновой aberrации. Критерий Марешаля более универсальный, чем допуск Релея, он подходит для любых типов aberrаций.

Рассмотрим вывод формулы Марешаля. Функция рассеяния точки, в соответствии с выражением (9.2.10):

$$h(\eta_x, \eta_y) = |F^{-1}[f(\rho_x, \rho_y)]|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho_x, \rho_y) e^{2\pi i(\eta_x \rho_x + \eta_y \rho_y)} d\rho_x d\rho_y \right|^2 \quad (9.5.3)$$

Значение ФРТ в ее центральном максимуме:

$$h(0) = h(\eta_x = 0, \eta_y = 0) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho_x, \rho_y) d\rho_x d\rho_y \right|^2 \quad (9.5.4)$$

Воспользовавшись выражением для зрачковой функции (9.2.3), получим:

$$h(0) = \left| \iint_{\Omega_0} e^{2\pi i W(\rho_x, \rho_y)} d\rho_x d\rho_y \right|^2 \quad (9.5.6)$$

В случае малых aberrаций  $|W| < 1/4$ , следовательно  $|W|^3, |W|^4, \dots \ll 1$ . Тогда при разложении функции  $e^{2\pi i W}$  в ряд, можно оставить только три члена, а остальные отбросить  $\left( e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots \right)$ , отсюда:

$$e^{2\pi i W} \approx 1 + 2\pi i W + \frac{1}{2}(2\pi i W)^2 = 1 + 2\pi i W - 2\pi^2 W^2 \quad (9.5.7)$$

Тогда можно записать приближенное выражение для ФРТ:

$$h(0) \approx \left| \iint_{\Omega_0} [1 + 2\pi i W - 2\pi^2 W^2] d\rho_x d\rho_y \right|^2 =$$

$$= \left| \iint_{\Omega_0} d\rho_x d\rho_y + 2\pi i \iint_{\Omega_0} W(\rho_x, \rho_y) d\rho_x d\rho_y - 2\pi^2 \iint_{\Omega_0} W^2(\rho_x, \rho_y) d\rho_x d\rho_y \right|^2 \quad (9.5.8)$$

Введем обозначение для среднего значения волновой aberrации по зрачку:

$$\bar{W} = \frac{1}{\Omega_0} \iint_{\Omega_0} W(\rho_x, \rho_y) d\rho_x d\rho_y \quad (9.5.9)$$

и среднего квадрата волновой aberrации:

$$\bar{W}^2 = \frac{1}{\Omega_0} \iint_{\Omega_0} W^2(\rho_x, \rho_y) d\rho_x d\rho_y \quad (9.5.10)$$

Тогда выражение (9.5.8) запишется в виде:

$$h(0) \approx \Omega_0^2 \left| 1 + 2\pi i \bar{W} - 2\pi^2 \bar{W}^2 \right|^2 \quad (9.5.11)$$

Модуль комплексного числа  $z = a + ib$  вычисляется как сумма квадратов вещественной и мнимой частей  $|z|^2 = a^2 + b^2$ , следовательно:

$$h(0) \approx \Omega_0^2 \left[ 1 + 2\pi \bar{W}^2 + 4\pi^4 (\bar{W}^2)^2 + 4\pi^2 \bar{W}^2 \right] = \Omega_0^2 \left\{ 1 - 4\pi^2 \left[ \bar{W}^2 - (\bar{W})^2 \right] \right\} \quad (9.5.12)$$

Значение ФРТ в максимуме при отсутствии aberrаций определяется выражением:

$$h_0(0) = \Omega_0^2 \quad (9.5.13)$$

Тогда **формула Маршала:**

$$St = \frac{h(0)}{h_0(0)} \approx 1 - 4\pi^2 \left[ \bar{W}^2 - (\bar{W})^2 \right] \quad (9.5.14)$$

Величина  $[\overline{W^2} - (\overline{W})^2]$  называется **дисперсией волновой аберрации по зрачку** (дисперсия – это разность среднего квадрата и квадрата среднего значения):

$$D_W = \overline{(W - \overline{W})^2} = \overline{W^2 - 2W\overline{W} + (\overline{W})^2} = \overline{W^2} - 2\overline{W}\overline{W} + (\overline{W})^2 = \overline{W^2} - (\overline{W})^2 \quad (9.5.15)$$

Формула Марешаля показывает, что важна не сама волновая аберрация, а ее изменение (деформация волнового фронта) по зрачку.

Средний квадрат деформации волнового фронта – это квадратный корень из дисперсии:

$$\sqrt{D_W} = W_{скв} \quad (9.5.16)$$

Формула Марешаля дает возможность приблизительно оценить число Штреля, если известен средний квадрат деформации волнового фронта:

$$St \approx 1 - 4\pi^2 D_W = 1 - 4\pi^2 W_{скв}^2 = 1 - (2\pi W_{скв})^2 \quad (9.5.17)$$

Если  $St \geq 0.8 \approx 1 - 4\pi^2 D_W$ , то, следовательно,  $D_W \leq \frac{1}{200}$ , а допуск

Марешаля на средний квадрат деформации волнового фронта:

$$\| W_{скв} \leq \frac{1}{14} \quad (9.5.18)$$

Маршалевский допуск на остаточные аберрации справедлив для любых типов аберраций малой величины.

#### 9.5.4. Влияние аберраций на ОПФ. Геометрически-ограниченные и дифракционно-ограниченные оптические системы

При наличии аберраций ОПФ оптической системы становится меньше, чем ОПФ безабберационной системы. На графике ЧКХ можно показать, как аберрации влияют на форму кривой контраста (рис.9.5.4). Кривые ЧКХ в присутствии аберраций могут иметь сложную форму, но они никогда не превышают кривую безабберационной ЧКХ.

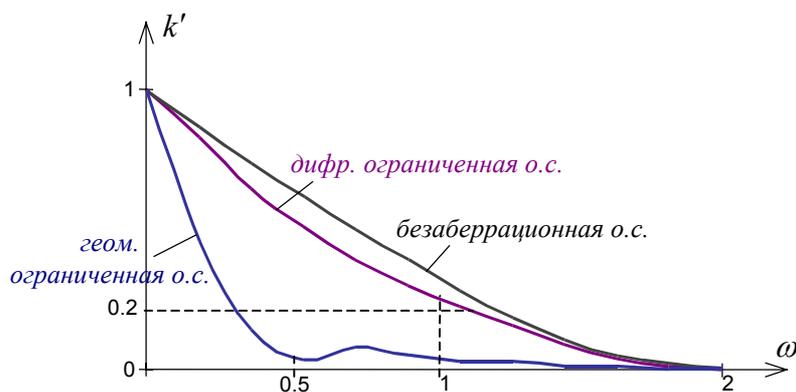


Рис.9.5.4. Влияние aberrаций на ЧКХ.

Дифракционно-ограниченные оптические системы имеют рабочий интервал частот, превышающий половину от предельной, то есть  $\omega > 1$  (рис.9.5.4). Качество изображения в таких системах определяется в основном явлениями дифракции и непосредственно зависит от отношения апертуры к длине волны  $A'/\lambda$ . Остаточные aberrации должны оцениваться по критерию Марешаля (9.5.18). К дифракционно-ограниченным системам относятся, в частности, измерительные системы, проекционные оптические системы для микроэлектроники и системы, работающие с глазом.

К геометрически-ограниченным относятся оптические системы, рабочий интервал частот для которых не превосходит  $\omega = 0.5$  в канонических частотах (рис.9.5.4). Качество изображения таких систем определяется картиной поперечных aberrаций и непосредственно не зависит от длины волны и апертуры. Степень коррекции геометрически-ограниченных систем оценивается поперечными aberrациями. К таким системам относятся, в частности, кино-, фото-, и телевизионные объективы.

## Приложения.

### Приложение А. Дифференциальные операторы математической теории поля

Математический аппарат, применяемый в теории электромагнитного поля – это теория скалярного и векторного поля. Предмет этого раздела математики – скалярные (А.1) и векторные (А.2) функции от трех пространственных переменных (радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки в пространстве):

$$U(x, y, z) = U(\mathbf{r}) \quad (\text{А.1})$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (\text{А.2})$$

В соотношениях теории поля используются дифференциальные операторы дифференцирования по времени (например,  $\dot{\mathbf{B}} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ) и по пространственным координатам. Операторы дифференцирования по пространственным координатам могут быть векторами или скалярами, с которыми можно производить все известные из векторной алгебры действия, в частности, векторное произведение (А.3), скалярное произведение (А.4) и смешанное произведение (А.5):

$$\nabla \times \mathbf{E} \quad (\text{А.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} \quad (\text{А.4})$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (\text{А.5})$$

### Дифференциальные операторы 1-го порядка

Оператор дифференцирования по пространственным координатам  $\nabla$  является вектором:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{А.6})$$

Применяя оператор  $\nabla$  к скалярному или векторному полю, можно получить следующие скалярные и векторные величины:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \mathit{grad}U = \begin{pmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial U / \partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \mathit{div}\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathit{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Результаты выражений (A.7) и (A.9) – векторы, а результат выражения (A.8) – скаляр.

### Дифференциальные операторы 2-го порядка

Оператор  $\nabla^2$  называется **оператором Лапласа** (является скаляром):

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{A.10})$$

Применение этого оператора к скалярному полю дает скалярную величину (A.11), а к векторному – векторную (A.12):

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \nabla^2 F_x \\ \nabla^2 F_y \\ \nabla^2 F_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

### Основные математические тождества теории поля

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \mathit{grad}(\mathit{div}\mathbf{F}) \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathit{rot}(\mathit{rot}\mathbf{F}) \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \nabla^2 \mathbf{F} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \times (\nabla U) = \mathit{rot}(\mathit{grad}U) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathit{div}(\mathit{rot}\mathbf{F}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

Все рассмотренные соотношения широко используются в оптике для описания светового поля, вывода уравнений и законов геометрической оптики.

**Приложение Б. Сводная таблица матриц преобразования**

Название	Выражение
<b>Общий вид матрицы преобразований лучей</b>	$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
Геометрический смысл элементов матрицы	$G = \begin{pmatrix} \frac{S'_F}{f'} & \frac{S_F \cdot S'_F - f \cdot f'}{n' \cdot f'} \\ -\Phi & \frac{S_F}{f} \end{pmatrix}$
Уравнение преобразования лучей	$y' = Ay + BY$ $Y' = Cy + DY$
Определитель матрицы	$\det G = AD - BC = 1$
Обратная матрица	$G^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$
Матрица переноса	$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Матрица преломления	$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$
Оптическая сила преломляющей поверхности	$\Phi = \rho \cdot (n' - n)$
Оптическая сила отражающей поверхности	$\Phi = -2\rho \cdot n$
Матрица сложной оптической системы	$G = T_K R_K \dots R_3 T_2 R_2 T_1 R_1 T_0$
Матрица пакета из плоскопараллельных слоев	$G = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \frac{d_1}{n_1} + \dots + \frac{d_n}{n_n}$
Матрица двухкомпонентной оптической системы	$G = R_2 D R_1$
Матрица тонкой линзы	$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$

## Литература

1. Бегунов Б.Н., Заказнов Н.П. и др. Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1984.
2. Заказнов Н.П. и др. Прикладная оптика. М.: Машиностроение, 1988.
3. Дубовик А.С. и др. Прикладная оптика. М.: Недра, 1982.
4. Русинов М.М. и др. Вычислительная оптика. Справочник. Л.: Машиностроение, 1984.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
6. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высшая школа, 1985.
7. Бутиков Е.И. Оптика. М.: Высшая школа, 1986.
8. Джерард А., Берч Дж.М. Введение в матричную оптику. М.: Мир, 1978.
9. Родионов С.А. Автоматизация проектирования оптических систем. Л.: Машиностроение. 1982.
10. Прикладная физическая оптика. Под. ред. В.А.Москалева С.-Пб.: Политехника, 1955.
11. Ландсберг Г.С. Оптика. М.:Наука, 1976.
12. Дичберн Р. Физическая оптика. М.: Наука, 1965.

# Содержание

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>1. Описание световых волн.....</b>	<b>5</b>
1.1. Основные свойства световых полей.....	5
1.2. Уравнения Максвелла.....	6
1.3. Математическое описание электромагнитных волн.....	8
1.3.1. Волновые уравнения.....	8
1.3.2. Монохроматическое поле.....	11
1.3.3. Комплексная амплитуда.....	14
1.3.4. Уравнение Гельмгольца.....	15
1.4. Регистрируемые (наблюдаемые) характеристики поля.....	15
1.4.1. Интенсивность поля.....	15
1.4.2. Наблюдаемые величины при сложении полей.....	16
Сложение когерентных полей.....	16
Сложение некогерентных полей.....	17
1.4.3. Квазимонохроматическое и полихроматическое поле.....	17
1.4.4. Простейшие монохроматические волны.....	18
Плоские волны.....	18
Сферические волны.....	19
<b>2. Энергетика световых волн.....</b>	<b>21</b>
2.1. Энергетические единицы и соотношения между ними.....	21
2.1.1. Поток излучения.....	21
2.1.2. Поверхностная плотность потока энергии (освещенность, светимость).....	22
2.1.3. Сила излучения.....	23
2.1.4. Энергетическая яркость.....	24
2.1.5. Инвариант яркости вдоль луча.....	25
2.1.6. Поглощение света средой.....	25
2.2. Световые величины.....	26
2.2.1. Световые величины.....	26
2.2.2. Связь световых и энергетических величин.....	28
2.2.3. Практические световые величины и их примеры.....	29
2.3. Модели источников излучения.....	30
2.3.1. Плоский ламбертовский излучатель.....	31
2.3.2. Сферический ламбертовский излучатель.....	32
2.4. Поток от излучателей различной формы.....	33

2.4.1. Сферический ламбертовский излучатель .....	33
2.4.2. Плоский ламбертовский излучатель .....	34
2.5. Яркость рассеивающей поверхности .....	35
2.6. Освещенность, создаваемая различными источниками (закон обратных квадратов).....	36
2.6.1. Освещенность, создаваемая точечным источником.....	36
2.6.2. Освещенность от протяженного ламбертовского источника .....	37
<b>3. Прохождение света через границу раздела двух сред .....</b>	<b>39</b>
3.1. Отражение и преломление света на границе раздела двух сред .....	39
3.1.1. Закон преломления.....	39
3.1.2. Закон отражения .....	41
3.1.3. Полное внутреннее отражение.....	42
3.2. Формулы Френеля. Соотношение между амплитудами падающих, преломленных и отраженных волн.....	43
3.2.1. Формулы Френеля.....	43
3.2.2. Распределение энергии между отраженным и преломленным полями .....	45
3.3. Различные случаи падения и отражения света.....	46
3.3.1. Нормальное падение .....	46
3.3.2. Угол Брюстера .....	47
3.3.3. Просветление оптики. Тонкие пленки .....	48
<b>4. Геометрическая оптика .....</b>	<b>50</b>
4.1. Приближение коротких длин волн. Уравнение эйконала.....	50
4.2. Основные понятия геометрической оптики .....	51
4.2.1. Волновой фронт и лучи .....	51
4.2.2. Оптическая длина луча .....	53
4.2.3. Конгруэнция лучей.....	54
4.3. Основные законы геометрической оптики .....	55
4.3.1. Закон независимого распространения лучей.....	55
4.3.2. Закон обратимости .....	55
4.3.3. Закон прямолинейного распространения .....	56
4.3.4. Закон преломления и отражения .....	56
4.3.5. Принцип таутохронизма.....	56
4.3.6. Принцип Ферма .....	56
4.3.7. Закон Малюса-Дюпена .....	58
4.3.8. Инварианты .....	58
Интегральный инвариант Лагранжа .....	58

Дифференциальный инвариант Лагранжа.....	58
Инвариант Штраубеля.....	59
4.4. Пучки лучей.....	60
4.4.1. Гомоцентрические пучки лучей.....	60
4.4.2. Негомоцентрические пучки.....	61
4.4.3. Астигматический пучок.....	62
4.5. Перенос поля в приближении геометрической оптики. Пределы применимости геометрической оптики.....	62
4.5.1. Уравнение переноса комплексной амплитуды в приближении геометрической оптики.....	62
4.5.2. Пределы применимости геометрической оптики.....	64
<b>5. Геометрическая теория оптических изображений. Идеальные оптические системы.....</b>	<b>65</b>
5.1. Описание оптических систем.....	65
5.1.1. Элементы оптических систем.....	65
Оптические среды.....	65
Оптические поверхности.....	67
Диафрагмы.....	68
5.1.2. Взаимное расположение элементов в оптической системе.....	68
Центрированная оптическая система.....	68
Правила знаков.....	69
Меридиональная и сагиттальная плоскости.....	71
5.1.3. Предмет и изображение в оптической системе.....	71
Основные положения.....	71
Сопряженные точки.....	72
Типы предмета и изображения.....	72
5.2. Теория идеальных оптических систем (параксиальная или гауссова оптика).....	72
5.2.1. Основные положения.....	72
5.2.2. Линейное, угловое, продольное увеличение.....	73
Линейное (поперечное) увеличение.....	73
Угловое увеличение.....	74
Продольное увеличение.....	74
5.2.3. Кардинальные точки и отрезки.....	75
5.2.4. Построение изображений.....	76
5.3. Основные соотношения параксиальной оптики.....	78
5.3.1. Вывод зависимости между положением и размером предмета и изображения.....	78

5.3.2. Угловое увеличение и узловые точки .....	79
5.3.3. Частные случаи положения предмета и изображения.....	80
5.3.4. Связь продольного увеличения с поперечным и угловым .....	81
5.3.5. Диоптрийное исчисление .....	82
5.3.6. Инвариант Лагранжа-Гельмгольца.....	82
<b>6. Матричная теория Гауссовой оптики .....</b>	<b>84</b>
6.1. Преобразование координат лучей оптической системой.....	84
6.1.1. Координаты лучей в пространстве предметов и пространстве изображений.....	84
6.1.2. Преобразование координат оптических лучей.....	85
6.2. Матрица преобразования лучей.....	85
6.2.1. Общий вид матрицы преобразования (ABCD-матрица) .....	85
6.2.2. Геометрический смысл элементов матрицы преобразования .....	86
Определитель матрицы преобразования .....	88
Обратная матрица преобразования .....	88
Условие сопряжения опорных плоскостей .....	88
6.2.3. Виды матриц преобразования .....	89
Матрица преломления .....	89
Матрица переноса .....	89
6.2.4. Матрица одной преломляющей поверхности .....	90
6.2.5. Матрица зеркальной (отражающей) поверхности .....	91
6.3. Матрицы оптической системы, состоящей из нескольких компонентов	92
6.3.1. Пакет из плоскопараллельных слоев.....	93
6.3.2. Оптическая система с нулевыми расстояниями между компонентами .....	94
6.3.3. Двухкомпонентная оптическая система .....	94
Афокальные (телескопические) системы .....	95
Матрица тонкой линзы .....	96
6.3.4. Расчет параксиальных (нулевых) лучей через оптическую систему	97
<b>7. Реальные оптические системы. Ограничения пучков .....</b>	<b>98</b>
7.1. Реальные (действительные) лучи .....	98
7.1.1. Расчет хода реальных лучей.....	98
7.1.2. Причины «непрохождения» лучей через поверхность .....	99
Луч не попадает на поверхность .....	99
Полное внутреннее отражение .....	100
Луч проходит за острым краем.....	100
Луч проходит за краем диафрагмы .....	101

7.2. Ограничения пучков лучей.....	101
7.2.1. Апертурная диафрагма .....	102
7.2.2. Полевая диафрагма.....	104
7.2.3. Виньетирование .....	104
7.3. Описание предметов, изображений и зрачков .....	106
7.3.1. Предмет (изображение) ближнего типа .....	107
7.3.2. Предмет (изображение) дальнего типа .....	108
7.3.3. Обобщенные характеристики .....	110
7.3.4. Обобщенный инвариант Лагранжа-Гельмгольца .....	111
<b>8. Аберрации оптических систем .....</b>	<b>84</b>
8.1. Формы представления аберраций (поперечная, продольная, волновая).....	112
8.1.1. Общие положения .....	112
8.1.2. Поперечные аберрации .....	112
8.1.3. Волновая аберрация .....	114
8.1.4. Продольные аберрации.....	115
8.2. Монохроматические аберрации.....	117
8.2.1. Разложение волновой аберрации в ряд .....	117
8.2.2. Радиально симметричные аберрации (дефокусировка и сферическая аберрация) .....	118
Дефокусировка .....	118
Сферическая аберрация 3 порядка .....	119
Сферическая аберрация 5 порядка .....	121
8.2.3. Кома .....	122
Кома и неизопланатизм .....	124
8.2.4. Астигматизм и кривизна изображения .....	125
8.2.5. Дисторсия.....	128
8.3. Хроматические аберрации.....	130
8.3.1. Хроматизм положения .....	130
Принципы ахроматизации оптических систем .....	131
8.3.2. Хроматизм увеличения .....	135
<b>9. Структура и качество оптического изображения .....</b>	<b>137</b>
9.1. Основные характеристики структуры изображения .....	137
9.1.1. Основные понятия.....	137
Свойство линейности.....	137
Свойство инвариантности к сдвигу (условие изопланатизма).....	137
9.1.2. Функция рассеяния точки.....	138
9.1.3. Гармонический периодический объект.....	139

9.1.4. Оптическая передаточная функция (ОПФ) .....	141
9.2. Схема формирования оптического изображения.....	144
9.3. Дифракционная структура изображения .....	149
9.3.1. Функция рассеяния точки в случае отсутствия aberrаций.....	149
9.3.2. Влияние неравномерности пропускания по зрачку на ФРТ .....	150
9.3.3. Безаберационная ОПФ. Предельная пространственная частота ....	151
9.4. Критерии качества оптического изображения .....	152
9.4.1. Предельная разрешающая способность по Релею .....	152
9.4.2. Разрешающая способность по Фуко .....	153
9.5. Влияние aberrаций на ФРТ и ОПФ.....	154
9.5.1. Число Штреля .....	155
9.5.2. Критерий Релея для малых aberrаций .....	155
9.5.3. Формула Марешаля. Допуск Марешаля для малых aberrаций ....	156
9.5.4. Влияние aberrаций на ОПФ. Геометрически-ограниченные и дифракционно-ограниченные оптические системы .....	158
<b>Приложения. ....</b>	<b>84</b>
Приложение А. Дифференциальные операторы математической теории поля .....	160
Дифференциальные операторы 1-го порядка .....	160
Дифференциальные операторы 2-го порядка .....	161
Основные математические тождества теории поля .....	161
Приложение Б. Сводная таблица матриц преобразования .....	162
<b>Литература .....</b>	<b>163</b>

Название кафедры прикладной и компьютерной оптики Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики (технического университета) отражает новейшую тенденцию проникновения компьютерных технологий во все сферы науки и техники. В то же время эта кафедра является прямой наследницей старейших оптических кафедр России – кафедры теории оптических приборов, физиологической оптики, оптических приборов, лабораторных, а затем оптико-механических приборов. В разное время этими кафедрами заведовали и работали на них такие выдающиеся ученые как академик В.П. Линник, член-корреспондент Академии наук СССР профессор В.С. Игнатовский, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, профессор, доктор технических наук В.Н. Чуриловский, заслуженный деятель науки и техники РСФСР, лауреат Ленинской и четырех Государственных премий, премии Французской Академии наук, профессор, доктор технических наук М.М. Русинов, заслуженный деятель науки и техники РСФСР профессор, доктор технических наук И.И. Крыжановский, член-корреспондент Академии артиллерийских наук, профессор, доктор технических наук А.Н. Захарьевский, заслуженный деятель науки РФ, лауреат Ленинской премии и премии Совета Министров СССР, профессор, доктор технических наук В.А. Зверев, лауреат Государственной премии и премии Совета Министров СССР профессор, доктор технических наук А.П. Грамматин, лауреат Государственной премии профессор, доктор технических наук П.Д. Иванов, лауреат премии Совета Министров СССР, профессор, доктор технических наук С.А. Родионов.

Таким образом кафедра прикладной и компьютерной оптики по праву может считаться ведущей оптической кафедрой России, продолжающей дело таких основоположников как В.С. Игнатовский, В.Н. Чуриловский, М.М. Русинов, В.П. Линник, А.Н. Захарьевский, и собравшей в своем составе ведущих представителей школы прикладной и вычислительной оптики: Л.Н. Андреева, А.П. Грамматина, В.А. Зверева, П.Д. Иванова, С.А. Родионова и их учеников.

В списке достижений кафедры: создание непревзойденных широкоугольных аэрофотосъемочных объективов с улучшенным светораспределением по полю и приборов обработки аэрофотоснимков (М.М. Русинов, Н.А. Агальцова), превосходящие зарубежные аналоги гидросъемочные объективы (М.М. Русинов, П.Д. Иванов, Л.Н. Курчинская), методы и средства контроля главного зеркала телескопа БТА (В.А. Зверев, С.А. Родионов, В.В. Усоскин), металлостеклянная оптика (И.И. Крыжановский, С.М. Никитин), оптика для космического проекта “Вега” (Г.И. Цуканова), высокоскоростные кинокамеры для научных исследований (И.И. Крыжановский, В.И. Решеткин), компьютерные пакеты автоматизированного проектирования оптики (С.А. Родионов с сотрудниками). Эти достижения в свое время были отмечены двумя ленинскими премиями, пятью государственными премиями, премией Совета Министров СССР, премией французской академии наук.

В настоящее время кафедра ведет подготовку специалистов и научную работу в следующих взаимосвязанных направлениях:

- теория и проектирование оптических систем, традиционно называемые вычислительной оптикой;
- оптические измерения и контроль оптических элементов и систем;
- оптические приборы, включая общую теорию, микроскопы и контрольно-измерительные приборы, геодезические приборы, офтальмологическая оптика;
- математические методы, алгоритмы, программы и компьютерные системы решения оптических задач, что можно коротко назвать компьютерной оптикой.

О последнем направлении следует сказать несколько подробнее. Следует подчеркнуть тот известный факт, что вычислительная оптика не только явилась первым практическим применением для компьютеров (одним из первых применений первой в мире ЭВМ Марк-1 в 1944 году был расчет оптических систем), но и способствовала развитию многих новых методов прикладной математики (методов оптимизации, численного интегрирования, решения некорректных задач и т.д.)

В России работы в этом направлении были начаты А.П. Грамматиным (1958 г.). В ЛИТМО в 1960 году были построены одни из первых отечественных ЭВМ ЛИТМО-1 и ЛИТМО-2, предназначенные главным образом для расчета оптических систем; а соответствующий математический аппарат был разработан доцентом кафедры оптико-механических приборов В.В. Хваловским.

С 1965 г. на кафедре оптико-механических приборов благодаря новаторским идеям и методам С.А. Родионова получает развитие новое направление в прикладной оптике – разработка математических методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения оптических задач. Результаты фундаментальных исследований С.А. Родионова в области формирования изображения, теории дифракции и математического моделирования были положены в основу разработки пакета программ для автоматизированного проектирования оптических систем ОПАЛ, широко известного в оптической промышленности.

В настоящее время объектами исследований в области компьютерной оптики, проводимых на кафедре являются:

- методы и программы проектирования оптических систем (методы синтеза, анализа аберраций и качества изображения, методы оптимизации, расчет допусков);
- обработка данных контроля оптических элементов и систем (интерферограммы, гартманограммы и т.п.);
- компьютерное моделирование изображения с учетом различных факторов (частичная когерентность, поляризация, нелинейности и неизопланатизм и т.д.)
- теория и методы оптимальной компьютерной юстировки;
- моделирование процессов ближнепольной оптики.

Основным и наиболее перспективным направлением развития кафедры представляется именно компьютерная оптика как основа для подготовки так называемых “компьютерных инженеров” – специалистов, профессия которых, по нашему мнению и по мнению авторитетных зарубежных экспертов, станет ведущей в наступающем веке.

Область деятельности таких специалистов – это решение сложных инженерных и научных задач ( в нашем конкретном случае прикладной оптики) на основе интенсивного использования математических методов и компьютерных технологий, а также разработка такого рода технологий.

Общепрофессиональная и специальная подготовка специалистов базируется на следующих составляющих:

- фундаментальных и широких знаний в области предмета разработки и исследования (прикладной оптики, оплотехники, оптических приборов и систем);
- глубоких знаний прикладной математики, включая математическое моделирование, численные методы, методы оптимизации и т.п.;
- владения современными компьютерными технологиями, особенно применяемыми в инженерной и научной деятельности.;

Как показывает опыт, задачи прикладной оптики настолько разнообразны, сложны и комплексны, а применяемые для их решения методы, модели и средства настолько универсальны, что специалист по компьютерной оптике может с успехом практически безо всякой адаптации работать в любой области, требующей владения математическими методами и компьютерными технологиями.

С информацией о кафедре можно ознакомиться на сервере: [wwwaco.ifmo.ru](http://wwwaco.ifmo.ru)

Родионов Сергей Аронович

ОСНОВЫ ОПТИКИ

Конспект лекций

В авторской редакции

Компьютерное макетирование

Зав. редакционно-издательским отделом

Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99

Подписано к печати 15.12.00

Отпечатано на ризографе. Тираж 500 экз. Заказ № 212.

Т.В. Иванова

Н.Ф. Гусарова